

【Ⅰ】

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
6	7	6	9	6	1	3	8	7

〔解説〕

(1)

曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が 2 点 $(p, 0), (q, 0)$ を通ることから、

$$p^3 + ap^2 + bp + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$q^3 + aq^2 + bq + c = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。また、この曲線が点 $(p, 0)$ で x 軸と接することから、この方程式を x で微分した

$$y' = 3x^2 + 2ax + b$$

について、

$$3p^2 + 2ap + b = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。①、②の差をとると、

$$\begin{aligned} (q^3 - p^3) + a(q^2 - p^2) + b(q - p) &= 0 \\ \Leftrightarrow (q - p)(q^2 + qp + p^2) + a(q - p)(q + p) + b(q - p) &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 + pq + q^2 + a(q + p) + b &= 0 \quad (\because q - p \neq 0) \end{aligned}$$

を得るので、これと③の差をとると、

$$\begin{aligned} p^2 + pq + q^2 + a(q + p) + b - (3p^2 + 2ap + b) &= 0 \\ \Leftrightarrow q^2 + pq - 2p^2 + aq - ap &= 0 \\ \Leftrightarrow (q - p)(q + 2p) + a(q - p) &= 0 \\ \Leftrightarrow (q - p)(q + 2p + a) &= 0 \\ \therefore a = -2p - q \quad (\because q - p \neq 0) \end{aligned}$$

と分かる。また、これと③より、

$$\begin{aligned} 3p^2 + 2(-2p - q)p + b &= 0 \\ \therefore b &= p^2 + 2pq \end{aligned}$$

となり、これらと①より、

$$\begin{aligned} p^3 + (-2p - q)p^2 + (p^2 + 2pq)p + c &= 0 \\ \therefore c &= -p^2q \end{aligned}$$

となる。このとき、曲線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= x^3 - (2p + q)x^2 + (p^2 + 2pq)x - p^2q \\ &= (x - p)^2(x - q) \\ &= (x - p)^2\{(x - p) + (p - q)\} \\ &= (x - p)^3 - (q - p)(x - p)^2 \end{aligned}$$

と変形できるから、 x 軸とこの曲線とで囲まれる図形の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= -\int_p^q (x^3 + ax^2 + bx + c) dx \\ &= -\int_p^q \{(x - p)^3 - (q - p)(x - p)^2\} dx \\ &= -\left[\frac{(x - p)^4}{4} - (q - p) \cdot \frac{(x - p)^3}{3} \right]_p^q \\ &= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) (q - p)^4 \\ &= \frac{(q - p)^4}{12} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \sin 3x &= \sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x \\ &= \sin x(2 \cos^2 x - 1) + 2 \sin x \cos^2 x \\ &= \sin x(4 \cos^2 x - 1) \end{aligned}$$

が成り立つので、与えられた方程式は、

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x + 2 \sin x \cos x + \sin x(4 \cos^2 x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x(1 + 2 \cos x) &= 0 \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、 $0 \leq x < 2\pi$ において、与えられた方程式を満たす x は、

$$\begin{aligned} \sin x = 0 \text{ または } \cos x = 0 \text{ または } \cos x = -\frac{1}{2} \\ \therefore x = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

の 6 個である。

(3)

初項 3、公差 4 の等差数列を a_n とおくと、その第 n 項は、

$$a_n = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$$

である。これが 73 で割り切れるとき、自然数 k を用いて、

$$4n - 1 = 73k \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表せるが、この式の左辺は奇数であるから、 k も奇数である。よって、自然数 ℓ を用いて、

$$k = 4\ell - 3 \text{ または } k = 4\ell - 1$$

と表せる。

[1] $k = 4\ell - 3$ のとき

$$\begin{aligned} 4n - 1 &= 73(4\ell - 3) \\ \Leftrightarrow n &= 73\ell - \frac{109}{2} \end{aligned}$$

より、 n は自然数とならないため、不適である。

[2] $k = 4\ell - 1$ のとき

$$\begin{aligned} 4n - 1 &= 73(4\ell - 1) \\ \Leftrightarrow n &= 73\ell - 18 \end{aligned}$$

となるから、 $n = 73\ell - 18$ ($\ell = 1, 2, \dots$) となるとき、条件を満たす。

以上[1],[2]より、初項 3、公差 4 の等差数列の中で、73 で割り切れるものは、

$$a_{73\ell-18} = 73(4\ell - 1) \quad (\ell = 1, 2, \dots)$$

である。よって、

$$b_\ell = 73(4\ell - 1)$$

であるから、

$$b_5 = 73(4 \cdot 5 - 1) = 1387$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

あ
$$6$$

い
$$\frac{n(n-2)}{4}$$

う
$$\frac{(n-1)^2}{4}$$

え
$$3983$$

〔解説〕

(1)

$n=6$ のとき、条件を満たす自然数 a, b, c の組は、

$$(a, b, c) = (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (1, 3, 5), (2, 4, 6)$$

の 6 個である。

(2)

与えられた条件 $a+c=2b$ より、 $b-a=c-b$ であるから、これを k とおくと、 $k \geq 1$ であり、

$$b=a+k, c=a+2k$$

と表される。ここで、 n は 3 以上の偶数であるから、 $n=2m$ ($m=2, 3, \dots$) とおける。このとき、

条件を満たす自然数 a, b, c の組は、

$$(1, 1+k, 1+2k), \dots, (2m-2k, 2m-k, 2m)$$

の $2m-2k$ 個存在する。ただし、

$$2m-2k \geq 1 \Leftrightarrow k \leq m - \frac{1}{2}$$

であり、 k, m は自然数であるから、

$$1 \leq k \leq m-1 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

となる。よって、求める自然数の組の数は、 $\textcircled{1}$ の範囲における $2m-2k$ の和を考えると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} (2m-2k) &= 2m(m-1) - 2 \cdot \frac{1}{2} (m-1)m \\ &= m(m-1) \\ &= \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \quad (\because n=2m) \\ &= \frac{n(n-2)}{4} \end{aligned}$$

より、 $\frac{n(n-2)}{4}$ 個である。

(3)

(2) と同様にして、

$$b=a+k, c=a+2k$$

とおく。ここで、 n は 3 以上の偶数であるから、 $n=2m+1$ ($m=1, 2, \dots$) とおける。このとき、条

件を満たす自然数 a, b, c の組は、

$$(1, 1+k, 1+2k), \dots, (2m+1-2k, 2m+1-k, 2m+1)$$

の $2m+1-2k$ 個存在する。ただし、

$$2m+1-2k \geq 1 \Leftrightarrow k \leq m \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

である。よって、求める自然数の組の数は、 $\textcircled{2}$ の範囲における $2m+1-2k$ の和を考えると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (2m+1-2k) &= 2m \cdot m + m - 2 \cdot \frac{1}{2} m(m+1) \\ &= m^2 \\ &= \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \quad (\because n=2m+1) \\ &= \frac{(n-1)^2}{4} \end{aligned}$$

より、 $\frac{(n-1)^2}{4}$ 個である。

(4)

a, b, c のうち、どれが 2016 であるかによって場合分けを行う。

[1] $a=2016$ であるとき

$$b-a=k \quad (k \geq 1) \text{ とおくと、}$$

$$(a, b, c) = (2016, 2016+k, 2016+2k)$$

であり、条件より $c \leq 4000$ であるから、

$$2016+2k \leq 4000 \Leftrightarrow k \leq 992$$

である。よって、

$$1 \leq k \leq 992$$

であるから、条件を満たす自然数 a, b, c の組の数は 992 個である。

[2] $b=2016$ であるとき

$$b-a=k \quad (k \geq 1) \text{ とおくと、}$$

$$(a, b, c) = (2016-k, 2016, 2016+k)$$

であり、条件より $a \geq 1$ かつ $c \leq 4000$ であるから、

$$2016-k \geq 1 \text{ かつ } 2016+k \leq 4000$$

$$\Leftrightarrow k \leq 2015 \text{ かつ } k \leq 1984$$

$$\therefore k \leq 1984$$

である。よって、

$$1 \leq k \leq 1984$$

であるから、条件を満たす自然数 a, b, c の組の数は 1984 個である。

[3] $c=2016$ であるとき

$$b-a=k \quad (k \geq 1) \text{ とおくと、}$$

$$(a, b, c) = (2016-2k, 2016-k, 2016)$$

であり、条件より $a \geq 1$ であるから、

$$2016-2k \geq 1 \Leftrightarrow k \leq \frac{2015}{2}$$

である。よって、 k が自然数であることに注意すると、

$$1 \leq k \leq 1007$$

であるから、条件を満たす自然数 a, b, c の組の数は 1007 個である。

以上[1]から[3]より、条件を満たす自然数 a, b, c の組のうち、 a, b, c のいずれかが 2016 であるものは、全部で

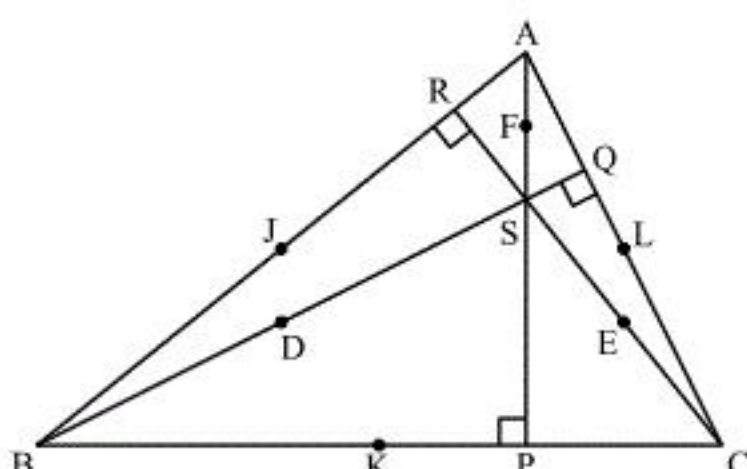
$$992+1984+1007=3983 \text{ 個}$$

である。

〔Ⅲ〕

(1)

条件より、題意の三角形は以下の図のようになっている。



$\triangle ABS$ と $\triangle JBD$ について、点 J, D がそれぞれ線分 AB, SB の中点であることから、中点連結定理より、

$$JD = \frac{1}{2}AS, JD \parallel AS \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。同様に、 $\triangle ACS$ と $\triangle LCE$ について、点 L, E がそれぞれ線分 AC, SC の中点であることから、中点連結定理より、

$$LE = \frac{1}{2}AS, LE \parallel AS \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。以上①, ②より、

$$JD = LE, JD \parallel LE$$

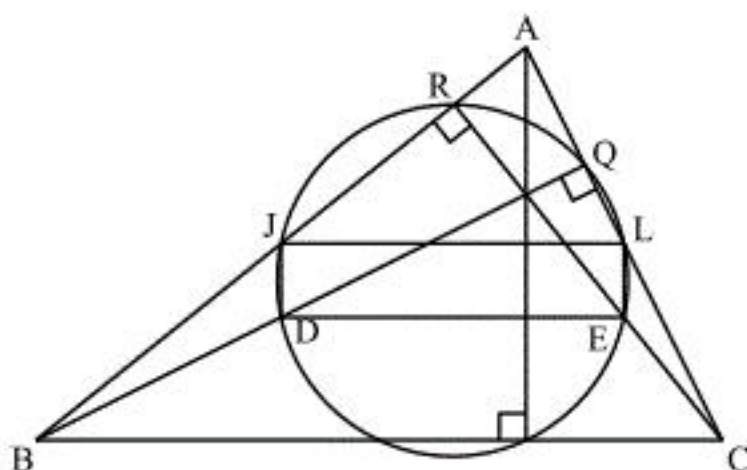
を得るので、四角形 JDEL は平行四辺形であること分かる。また、 $\triangle ABC$ と $\triangle AJL$ について、点 J, L がそれぞれ線分 AB, AC の中点であることから、中点連結定理より、

$$BC \parallel JL$$

が成り立つ。以上より $JD \parallel AS$, $BC \parallel JL$ を得るが、これと $AS \perp BC$ より、 $JD \perp JL$ であることが分かる。したがって、平行四辺形 JDEL は、隣り合う辺が直交するから、長方形である。

(証明終)

(2)



円 O は長方形 JDEL に外接する円であるから、 $\triangle DJL$ は円 O に内接している。このとき、点 J は長方形 JDEL の頂点であるから、

$$\angle DJL = 90^\circ$$

である。一方、辺 AC と線分 BQ は直交するから、

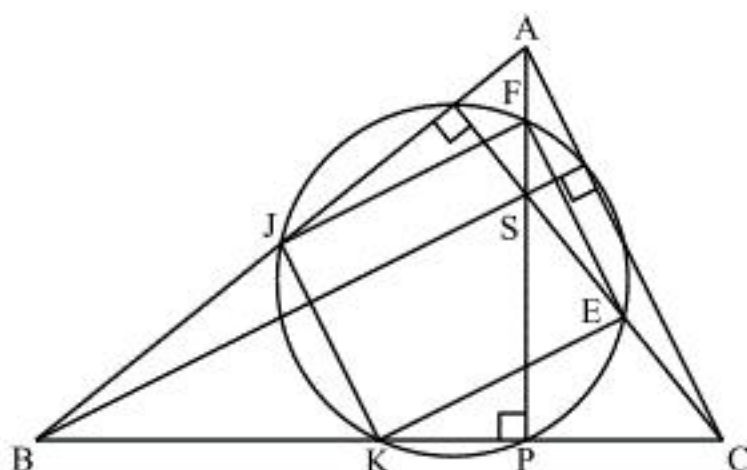
$$\angle DQL = 90^\circ$$

である。したがって、 $\angle DJL = \angle DQL$ であるから、円周角の定理の逆より、点 Q は円 O の周上にある。同様にして、 $\triangle JLE$ と点 R について考えると、点 R も円 O の周上にある。以上より、題意は示された。

(証明終)

(3)

(2)において、 $\angle JLE = 90^\circ$ であるから、線分 JE は円 O の直径である。



まず、(1)と同様にして、四角形 KEFJ が長方形であることを示す。 $\triangle BCS$ と $\triangle KCE$ について、点 K, E がそれぞれ線分 BC, SC の中点であることから、中点連結定理より、

$$KE = \frac{1}{2}BS, KE \parallel BS \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。同様に、 $\triangle BAS$ と $\triangle JAF$ について、点 J, F がそれぞれ線分 BA, SA の中点であることから、中点連結定理より、

$$JF = \frac{1}{2}BS, JF \parallel BS \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立つ。以上③, ④より、

$$KE = JF, KE \parallel JF$$

を得るので、四角形 KEFJ は平行四辺形であること分かる。また、 $\triangle BCA$ と $\triangle BKJ$ について、点 J, K がそれぞれ線分 BA, BC の中点であることから、中点連結定理より、

$$AC \parallel JK$$

が成り立つ。以上より $KE \parallel BS$, $AC \parallel JK$ を得るが、これと $BS \perp AC$ より、 $KE \perp JK$ であることが分かる。したがって、平行四辺形 KEFJ は、隣り合う辺が直交するから、長方形である。これより、 $\angle JFE = \angle JKE = 90^\circ$ であるから、点 F, K は線分 JE を直径とする円周上の点であり、すなわち円 O の周上の点であることがわかる。さらに、 $\angle FJK = \angle FEK = 90^\circ$ から、線分 FK も円 O の直径であり、 $BC \perp AP$ より $\angle FPK = 90^\circ$ であるから、点 P は線分 FK を直径とする円周上の点であり、すなわち円 O の周上の点である。よって、題意は示された。

(証明終)

〔Ⅳ〕

(1)

与えられた $f(x)$ を x で微分すると、

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

を得る。したがって、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$	$\nearrow$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	極小値	$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ は $x=1$ のときに最小値

$$f(1) = 1 - 1 - \log 1 = 0$$

をとる。よって、 $x \neq 1$ のとき $f(x) > 0$ が成り立つ。

(証明終)

(2)

(a)

曲線 $C_1: y = e^{sx}$ の、点 $(\alpha, e^{s\alpha})$ における接線の方程式を考える。曲線の方程式を微分すると、

$$y' = se^{sx}$$

となるから、接線の方程式は

$$y = se^{s\alpha}(x - \alpha) + e^{s\alpha} = se^{s\alpha}x + (1 - s\alpha)e^{s\alpha} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。同様にして、曲線 $C_2: y = e^{tx}$ の、点 $(\beta, e^{t\beta})$ における接線の方程式は、

$$y = te^{t\beta}x + (1 - t\beta)e^{t\beta} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで、方程式①と②が一致することから、

$$\begin{cases} se^{s\alpha} = te^{t\beta} \\ (1 - s\alpha)e^{s\alpha} = (1 - t\beta)e^{t\beta} \end{cases}$$

が成り立つ。 $0 < s < t$ より、 $s \neq 0, t \neq 0, t - s \neq 0$ であることに注意すると、第1式から

$$se^{s\alpha} = te^{t\beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{s\alpha}}{e^{t\beta}} = \frac{t}{s}$$

$$\Leftrightarrow e^{s\alpha - t\beta} = \frac{t}{s}$$

$$\therefore s\alpha - t\beta = \log \frac{t}{s} \quad \dots \textcircled{3}$$

が導かれ、第2式を第1式で割った式から、

$$\frac{(1 - s\alpha)e^{s\alpha}}{se^{s\alpha}} = \frac{(1 - t\beta)e^{t\beta}}{te^{t\beta}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{s} - \alpha = \frac{1}{t} - \beta$$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{1}{s} - \frac{1}{t} \quad \dots \textcircled{4}$$

が導かれる。よって、③④を α, β について解くことにより、

$$\alpha = \frac{1}{s} - \frac{1}{t-s} \log \frac{t}{s}, \beta = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-s} \log \frac{t}{s}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{1}{s} - \frac{1}{t-s} \log \frac{t}{s}, \beta = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-s} \log \frac{t}{s}$$

(b)

(a)の結果より、

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{s} - \frac{1}{t-s} \log \frac{t}{s} \\ &= \frac{1}{t-s} \left(\frac{t-s}{s} - \log \frac{t}{s} \right) \\ &= \frac{1}{t-s} \left(\frac{t}{s} - 1 - \log \frac{t}{s} \right) \\ &= \frac{1}{t-s} f\left(\frac{t}{s}\right) \end{aligned}$$

と変形できる。 $0 < s < t$ より $t-s > 0, \frac{t}{s} > 1$ であり、(1)の結果から $f\left(\frac{t}{s}\right) > 0$ が成り立つので、

$\alpha > 0$ を得る。同様に、

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{t} - \frac{1}{t-s} \log \frac{t}{s} \\ &= \frac{1}{t-s} \left(\frac{t-s}{t} - \log \frac{t}{s} \right) \\ &= \frac{1}{t-s} \left(1 - \frac{s}{t} + \log \frac{s}{t} \right) \\ &= -\frac{1}{t-s} f\left(\frac{s}{t}\right) \end{aligned}$$

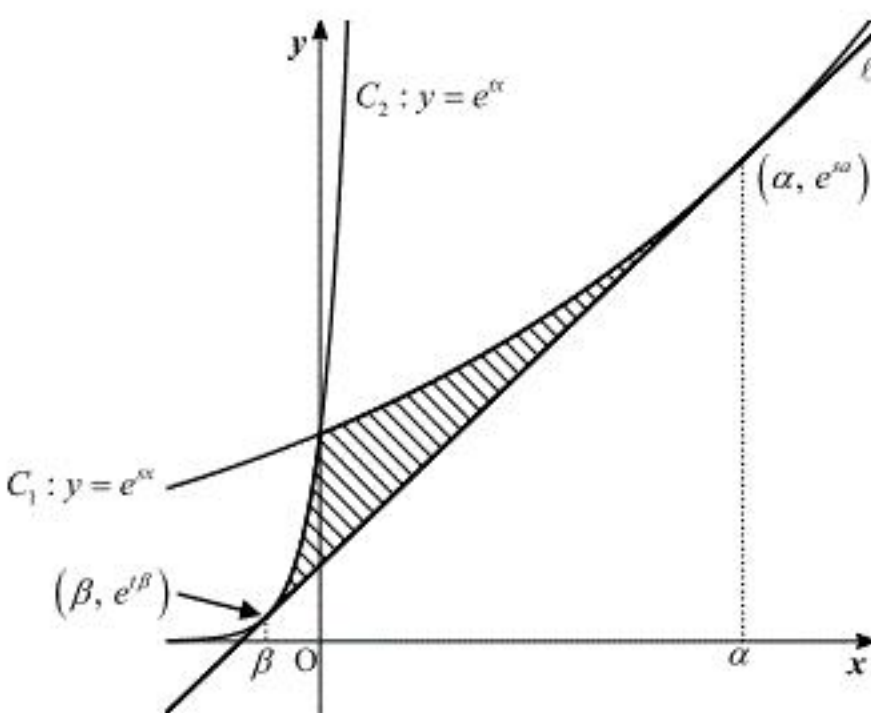
と変形できる。 $0 < s < t$ より $t-s > 0, 0 < \frac{s}{t} < 1$ であり、(1)の結果から $f\left(\frac{s}{t}\right) > 0$ が成り立つので、

$\beta < 0$ を得る。以上より、 $\alpha > 0 > \beta$ であることが示された。

(証明終)

(c)

求める面積 S は、以下の図の斜線部の面積である。



上図より、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\beta}^0 e^{sx} dx + \int_0^{\alpha} e^{sx} dx - \frac{1}{2}(e^{s\alpha} + e^{t\beta})(\alpha - \beta) \\ &= \left[\frac{e^{sx}}{s} \right]_{\beta}^0 + \left[\frac{e^{sx}}{s} \right]_0^{\alpha} - \frac{1}{2}(e^{s\alpha} + e^{t\beta})(\alpha - \beta) \\ &= \frac{1 - e^{t\beta}}{s} + \frac{e^{s\alpha} - 1}{s} - \frac{1}{2}(e^{s\alpha} + e^{t\beta})(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

と計算できる。ここで、④を代入すると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1 - e^{t\beta}}{s} + \frac{e^{s\alpha} - 1}{s} - \frac{1}{2}(e^{s\alpha} + e^{t\beta}) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) \\ &= \frac{e^{s\alpha}}{s} - \frac{e^{t\beta}}{t} - \left(1 + \frac{e^{s\alpha} + e^{t\beta}}{2} \right) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) \end{aligned}$$

となる。 $s=1$ のとき、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} s\alpha &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t-1} \log t \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{t-1} \cdot \frac{\log t}{t} \right) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t\beta &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{t-1} \log t \right) = -\infty \end{aligned}$$

であることから、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{s\alpha} = e, \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\beta} = 0$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} S &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{e^{s\alpha}}{s} - \frac{e^{t\beta}}{t} - \left(1 + \frac{e^{s\alpha} + e^{t\beta}}{2} \right) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ e^{s\alpha} - e^{t\beta} \cdot \frac{1}{t} - \left(1 + \frac{e^{s\alpha} + e^{t\beta}}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{t} \right) \right\} (\because s=1) \\ &= e - 0 \cdot 0 - \left(1 + \frac{e+0}{2} \right) (1-0) \\ &= \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} S = \frac{e}{2} - 1$$