

数 学 問 題

はじめに、これを読むこと。

1. この問題用紙は3ページまでである。ただし、ページ番号のない白紙はページ数に含まない。
2. 問題は、1ページから3ページに書かれている。それ以外のページは、計算用紙として使用してよい。
3. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
4. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
5. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークするか、または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しない。
6. 分数形で解答する場合は、それ以上約分できない形で答えなさい。また、根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
7. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
8. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入のこと。
9. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
11. **解答用紙はすべて回収する。**持ち帰らず、必ず提出しなさい。ただし、この問題用紙は、必ず持ち帰りなさい。
12. 試験時間は60分である。
13. マーク記入例

良い例	悪い例
	

※ この問題用紙は、必ず持ち帰りなさい。

〔I〕 次の各問の に入る数値を下の表から選んでアルファベットをマークせよ。同じアルファベットを選んでもかまわない。

1. 100 以下の自然数で、2 と 5 を共に素因数にもち、それ以外の素数を素因数にもたない数の個数は、 (1) 個である。

同様に 100 以下の自然数で、2 と 3 を共に素因数にもち、それ以外の素数を素因数にもたない数の個数は、 (2) 個である。

2. 曲線 $C: y = x^3 - 3x + 16$ を第 1 象限で考える。曲線 C の接線で、点 $(0, 0)$ を通るものを ℓ とするとき、 ℓ の傾きは、 (3) であり、 C 、 ℓ と y 軸で囲まれた領域の面積は、 (4) である。

3. 1 辺の長さが y の正方形を $ABCD$ とし、2 つの対角線の交点を O とする。
 O から垂直に高さが x の点 E をとり、四角錐 $E-ABCD$ を考える。 AE の長さが $\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、体積が最大となるのは、
 $x =$ (5) , $y =$ (6)
- のときである。

A. 0	B. 1	C. 2	D. 3
E. 4	F. 5	G. 6	H. 7
I. 8	J. 9	K. 10	L. 11
M. 12	N. 13	O. 14	P. 15
Q. $\frac{1}{2}$	R. $\frac{1}{3}$	S. $\frac{2}{3}$	T. $\frac{1}{4}$
U. $\frac{3}{4}$	V. $\frac{1}{5}$	W. $\frac{2}{5}$	X. $\frac{3}{5}$
Y. $\frac{4}{5}$	Z. $\frac{\sqrt{2}}{5}$		

〔Ⅱ〕 次のア～ナに当てはまる 0 ～ 9 の数字を解答欄にマークせよ。

三角形 ABC の内点 O をとる。AO, BO, CO をそれぞれ辺 BC, CA, AB までのばしたときの各交点を D, E, F とする。ここで、三角形 $\triangle ABO$, $\triangle ACO$, $\triangle BCO$ の面積が、それぞれ $\triangle ABO = c$, $\triangle ACO = b$, $\triangle BCO = a$ とする。

1. B と C を通る直線を ℓ とする。A から ℓ への垂線の長さを 6, O から ℓ への垂線の長さを 3 とするとき、 $\frac{AO}{DO} = \boxed{\text{ア}}$, $\frac{\triangle ABO}{\triangle BDO} = \boxed{\text{イ}}$ である。

2. 上の問 1 とは異なる三角形 ABC について、 $a = 8$, $b = 10$, $c = 6$ とする。

$\frac{\triangle CDO}{\triangle BDO} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ だから、 $\triangle BDO$ の面積は、 $\boxed{\text{オ}}$ であり、 $\triangle CDO$ の面積は、 $\boxed{\text{カ}}$ である。

同様にして、 $\triangle CEO = \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$, $\triangle AEO = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$,
 $\triangle AFO = \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$, $\triangle BFO = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ となり、特に

$$\frac{\triangle AFO}{\triangle BFO} \cdot \frac{\triangle BDO}{\triangle CDO} \cdot \frac{\triangle CEO}{\triangle AEO} = \boxed{\text{ツ}}$$

$$\frac{AO}{DO} \cdot \frac{BO}{EO} \cdot \frac{CO}{FO} = \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

〔Ⅲ〕 n と k を $n > k$ を満たす自然数とする。 n チームが参加するサッカーの大会がある。この大会では、全てのチームが k 回の試合を行う。但し、その k 試合の対戦相手は、全て異なるとする。このとき、次の問に答えよ。

1. $n = 4$, $k = 2$ の場合の大会が、何通りあるかもとめよ。
2. $n = 6$, $k = 3$ のとき、1つの大会の試合の総数をもとめよ。
3. 一般に、この大会が成立するためには、 n か k のどちらかが、偶数でなければならないことを示せ。
4. 各試合の両チームの得点を全て合計し、試合数で割った値を、その大会における1試合の平均得点と呼ぶことにする。

$n = 9$ のとき、各チームが k 試合行う大会における、1試合の平均得点が、 $\left(\frac{1}{27}k^2 - \frac{7}{9}k + 5\right)$ 点であったとする。1つの大会における総得点が、もっとも多くなる k をもとめよ。