

数 学 問 題

注意事項

1. この問題冊子は12 ページあります。解答用紙には、「数学①」と「数学②」の2 枚あり、「数学②」には表と裏があります。
2. あなたの受験番号は、2 枚の解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 監督者の指示にしたがい、2 枚の解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は、解答用紙「数学①」の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕の解答は、解答用紙「数学①」の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅲ〕,〔Ⅳ〕は、解答用紙「数学②」の所定の欄に解答しなさい。
7. 1 問につき2 つ以上マークしないこと。2 つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また、所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らず、必ず提出しなさい。
12. この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
13. 試験時間は120 分です。
14. マークシート記入例

良い例	悪い例
	

〔Ⅰ〕 次の空欄 **ア** から **エ** にあてはまるものを解答群の中から選び、

その記号を解答用紙の所定の欄にマークせよ。また、空欄 **オ** から

ケ にあてはまる 0 から 9 までの数字を、解答用紙の所定の欄にマークせ

よ。ただし、**カキクケ** は 4 桁の数である。

- (1) 曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ は、点 $(p, 0)$ で x 軸と接し、点 $(q, 0)$ で x 軸と交わるとする。ただし、 $p < q$ とする。このとき、 a, b, c を p, q で表すと、

$$a = \text{ア}, \quad b = \text{イ}, \quad c = \text{ウ}$$

となる。また、 x 軸とこの曲線とで囲まれる図形の面積を p, q で表すと

エ となる。

アの解答群

- | | | |
|-------------|--------------|-------------|
| ① $p + q$ | ④ $p + 2q$ | ⑦ $2p + q$ |
| ③ $2p + 2q$ | ⑤ $-p - q$ | ⑧ $-p - 2q$ |
| ⑥ $-2p - q$ | ⑨ $-2p - 2q$ | ② $p - q$ |
| ② $p - 2q$ | | |

イの解答群

- | | | |
|-----------------|----------------|-----------------|
| ① $p^2 + 2q^2$ | ④ $2p^2 + q^2$ | ⑦ $pq + q^2$ |
| ③ $p^2 + pq$ | ⑤ $2p^2 + pq$ | ⑧ $pq + 2q^2$ |
| ⑥ $2pq + q^2$ | ⑨ $p^2 + 2pq$ | ② $-p^2 - 2q^2$ |
| ② $-2p^2 - q^2$ | | |

ウの解答群

① $-p^3$

① p^3

② $-q^3$

③ q^3

④ pq^2

⑤ $-pq^2$

⑥ $-p^2q$

⑦ p^2q

⑧ $p^3 + q^3$

⑨ $p^3 - q^3$

エの解答群

① $\frac{(q-p)^3}{2}$

① $\frac{(q-p)^3}{3}$

② $\frac{(q-p)^3}{6}$

③ $\frac{(q-p)^3}{12}$

④ $(q-p)^3$

⑤ $(q-p)^4$

⑥ $\frac{(q-p)^4}{2}$

⑦ $\frac{(q-p)^4}{3}$

⑧ $\frac{(q-p)^4}{6}$

⑨ $\frac{(q-p)^4}{12}$

(2) $0 \leq x < 2\pi$ において $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ を満たす x は全部で

オ

 個ある。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

(3) 初項 3，公差 4 の等差数列の項の中で，73 で割り切れるものを小さい順に

$b_1, b_2, \dots$ とするとき， $b_5 =$ カキクケ である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅱ〕 次の空欄 あ から え に当てはまるもの(数または式)を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

n は 3 以上の自然数とする。条件「 $1 \leq a < b < c \leq n$ かつ $a + c = 2b$ 」を満たす自然数 a, b, c の組の個数について、次の問いに答えよ。

- (1) $n = 6$ のとき、条件を満たす自然数 a, b, c の組は全部で あ 個ある。
- (2) n が偶数のとき、条件を満たす自然数 a, b, c の組は全部で い 個ある。
- (3) n が奇数のとき、条件を満たす自然数 a, b, c の組は全部で う 個ある。
- (4) $n = 4000$ とする。条件を満たす自然数 a, b, c の組のうち、 a, b, c のいずれかが 2016 であるものは全部で え 個ある。

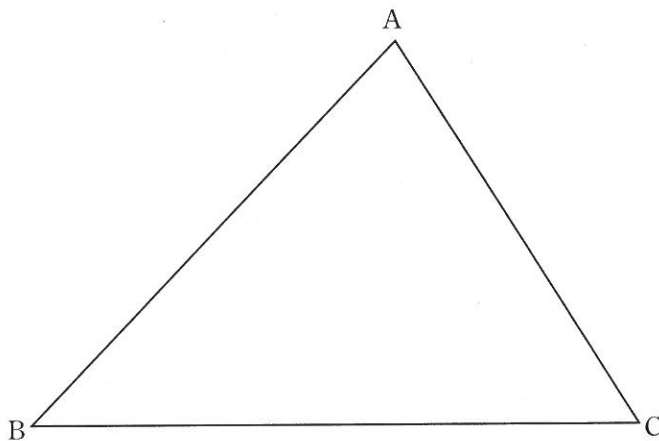
(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅲ〕 鋭角三角形 ABC で、 $CA < AB < BC$ を満たすものを考える。頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AP 、頂点 B から辺 CA に下ろした垂線を BQ 、頂点 C から辺 AB に下ろした垂線を CR とする。このとき、線分 AP 、 BQ 、 CR は 1 点で交わることが知られている。

このようにして得られた AP 、 BQ 、 CR の交点を S とし、線分 BS 、 CS 、 AS の中点をそれぞれ D 、 E 、 F とする。

また、辺 AB 、 BC 、 CA の中点をそれぞれ J 、 K 、 L とする。

- (1) 四角形 $JDEL$ は長方形であることを示せ。
- (2) 長方形 $JDEL$ が内接する円 O の周上に Q 、 R があることを示せ。
- (3) F 、 K 、 P が (2) の円 O の周上にあることを示せ。



(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔IV〕 次の問いに答えよ。ただし $\log$ は自然対数であり、 e はその底である。

- (1) $f(x) = x - 1 - \log x$ ($x > 0$) とする。 $x \neq 1$ のとき $f(x) > 0$ を示せ。
- (2) 2つの実数 s, t ($0 < s < t$) に対して、座標平面上の2つの曲線 $C_1: y = e^{sx}$ および $C_2: y = e^{tx}$ を考える。ある直線 ℓ が2つの曲線 C_1, C_2 とそれぞれ点 $(\alpha, e^{s\alpha}), (\beta, e^{t\beta})$ で接するとする。
- (a) α, β を s と t を用いて表せ。
- (b) $\alpha > 0 > \beta$ を示せ。
- (c) 曲線 C_1, C_2 と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を S とおく。 $s = 1$ のとき $\lim_{t \rightarrow \infty} S$ を求めよ。ただし、必要があれば $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ を用いて良い。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)