

【I】

〔解答〕

(1)	ア	イ			
	D	H			
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ
	A	D	J	B	C
(3)	ア	イ	ウ		
	A	C	D		
(4)	ア	イ	ウ	エ	オ
	F	B	F	B	E
(5)	ア	イ	ウ		
	A	F	F		
(6)	ア	イ			
	D	B			

〔解説〕

(1)
(この問題には不備があり、題意を満たす整式 $P(x)$ は存在せず、受験生全員に得点が与えられている。以下では $P(x)$ を $x^2-9x+20$ で割った余りを形式的に求める手法を示す。)

条件より、 $A(x), B(x)$ を商とすると、

$$P(x)=(x^2-3x-4)A(x)+2x-3\cdots\cdots①$$

$$P(x)=(x^2-4x-5)B(x)+x+3\cdots\cdots②$$

と書ける。 $P(x)$ を $x^2-9x+20$ で割ったときの余りを $ax+b$ とすると、 $C(x)$ を商として、

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2-9x+20)C(x)+ax+b\\&=(x-4)(x-5)C(x)+ax+b\end{aligned}$$

と書ける。①、②より、

$$P(4)=5$$

$$P(5)=8$$

だから、これらより、

$$P(4)=4a+b=5$$

$$P(5)=5a+b=8$$

を得る。これらを連立して、 $a=3, b=-7$ を得るから、求める余りは、 $3x-7$ である。

(2)
真数条件より、 $0<x<12$ である。与えられた不等式を変形して、

$$\begin{aligned}\log_3 x+\log_3 (12-x)&<3\\\Leftrightarrow \log_3 x(12-x)&<\log_3 27\end{aligned}$$

となる。底は $3>1$ だから、

$$\begin{aligned}x(12-x)&<27\\\Leftrightarrow x^2-12x+27&>0\\\Leftrightarrow (x-3)(x-9)&>0\\\Leftrightarrow x<3, 9<x\end{aligned}$$

である。よって、求める不等式の解は、 $0<x<3, 9<x<12$ である。

(3)
1から20までの自然数の中に、奇数は10個あるから、奇数ばかりからなる組の個数は、

$${}_{10}C_3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120\text{個}$$

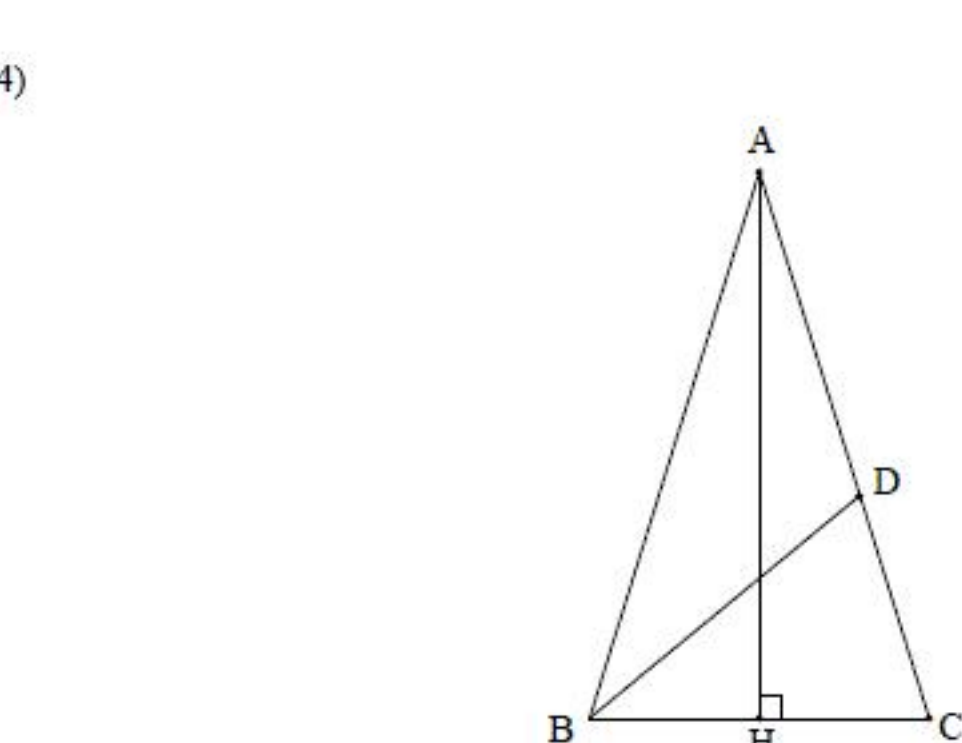
である。また、4の倍数でない数は15個あるから、4の倍数をまったく含まない組の個数は、

$${}_{15}C_3=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1}=455\text{個}$$

である。4の倍数を少なくとも1組含む組の個数は、余事象を考えて、

$${}_{20}C_3-{}_{15}C_3=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1}-455=1140-455=685\text{個}$$

である。



条件より、 $\angle DBC=36^\circ, \angle BDC=\angle BCD=72^\circ$ だから、二角相等より、 $\triangle ABC\sim\triangle BCD$ である。これより $\triangle BCD$ は二等辺三角形であるから、 $BD=BC$ である。また、

$\angle BAD=\angle ABD=36^\circ$ であるから、 $\triangle ABD$ は二等辺三角形であり、 $AD=BD$ である。よって、

$$DC=x\text{とおくと、}\quad AB=AC=AD+DC=BC+DC=2+x$$

であり、

$$\begin{aligned}AB:BC&=BC:CD\\\Leftrightarrow (2+x):2&=2:x\end{aligned}$$

であり、これより、

$$\begin{aligned}(2+x)x&=4\\\Leftrightarrow x^2+2x-4&=0\\\Leftrightarrow x&=-1\pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

となるが、 $x>0$ より $x=\sqrt{5}-1$ である。また、点Aからに辺BCに下ろした垂線の足をHとすると、この垂線AHは $\angle BAC$ を二等分するから、 $\angle HAC=18^\circ$ である。図より、垂線AHは辺BCの垂直二等分線で $HC=1$ だから、

$$\begin{aligned}\sin 18^\circ&=\sin \angle HAC\\&=\frac{HC}{AC}\\&=\frac{1}{2+\sqrt{5}-1}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}+1}\\&=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\end{aligned}$$

である。

(5)
 x 軸に接し、中心が y 軸上にある円の中心は、 $(0, r)$ とおけ、この円は x 軸と原点で接し、半径は $|r|$ である。これより、円の方程式は、

$$x^2+(y-r)^2=r^2$$

とかける。これが点 $(3, 9)$ を通るから、

$$\begin{aligned}3^2+(9-r)^2&=r^2\\\Leftrightarrow 9+81-18r+r^2&=r^2\\\Leftrightarrow r&=5\end{aligned}$$

となる。よって、求める方程式は、 $x^2+(y-5)^2=5^2$ となる。

(6)
条件より、
$$a_{n+1}=3a_n+2n+1\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots①$$
$$a_{n+2}=3a_{n+1}+2n+3\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots②$$

である。②-①より、

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+2$$

であり、 $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと、

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=3b_n+2\\\Leftrightarrow b_{n+1}+1&=3(b_n+1)\end{aligned}$$

である。 $a_1=1$ より、 $a_2=3a_1+2+1=6$ だから、

$$b_1=a_2-a_1=6-1=5$$

である。よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned}b_n+1&=6\cdot 3^{n-1}\\&=2\cdot 3^n\end{aligned}$$

$$\therefore b_n=2\cdot 3^n-1$$

である。よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 $n\geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2\cdot 3^k-1)\\&=1+\frac{2\cdot 3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(n-1)\\&=3^n-n-1\end{aligned}$$

となり、これは $n=1$ のときも成り立つ。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	
	C	B	
(2)	ウ	エ	オ
	I	I	I

〔解説〕

(1)

条件より,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$$

である。点Sは平面PQR上に存在するから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \alpha\overrightarrow{OP} + \beta\overrightarrow{OQ} + (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OR} \\ &= \frac{\alpha}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2\beta}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1-\alpha-\beta}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1-\beta}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2\beta}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2(1-\alpha-\beta)}{3}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

とおける。点Sは直線BC上に存在するから,

$$\begin{cases} \frac{1-\beta}{3} = 0 \\ \frac{2\beta}{3} + \frac{2(1-\alpha-\beta)}{3} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = 1 \end{cases}$$

であり, これより, $\overrightarrow{OS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ となる。

(2)

点Tは直線OG上であるから, 点Gが△ABCの重心であることをふまえ,

$$\overrightarrow{OT} = k\overrightarrow{OG} = \frac{k}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{k}{3}\overrightarrow{OC}$$

とおける。また, (1)と同様に, 点Tは平面PQR上に存在するから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \gamma\overrightarrow{OP} + \delta\overrightarrow{OQ} + (1-\gamma-\delta)\overrightarrow{OR} \\ &= \frac{1-\delta}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2\delta}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2(1-\gamma-\delta)}{3}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

ともおける。 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ はそれぞれ $\vec{0}$ でなく, 一次独立だから,

$$\begin{cases} \frac{k}{3} = \frac{1-\delta}{3} \\ \frac{k}{3} = \frac{2\delta}{3} \\ \frac{k}{3} = \frac{2(1-\gamma-\delta)}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ \gamma = \frac{1}{3} \\ \delta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

となり, $\overrightarrow{OT} = \frac{2}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{9}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{OC}$ とわかる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	$\frac{a^3}{3}$	
(2)	$a - \frac{2}{3}$	$\frac{2a^3}{3} - a + \frac{2}{3}$
(3)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

〔解説〕

- (1)
条件より、 C_1, C_2 の交点の x 座標は
- $$\begin{aligned} x^2 &= -x^2 + 2ax \\ \Leftrightarrow x(x-a) &= 0 \\ \therefore x &= 0, a \end{aligned}$$
- である。よって、求める面積は、 $a > 0$ をふまえ
- $$\begin{aligned} \int_0^a \{(-x^2 + 2ax) - x^2\} dx &= -2 \int_0^a x(x-a) dx \\ &= \frac{2a^3}{6} \\ &= \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

である。

- (2)
 $S(a)$ について、
- [1] $1 < a$ のとき
求める面積は、
- $$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^1 \{(-x^2 + 2ax) - x^2\} dx \\ &= \int_0^1 (-2x^2 + 2ax) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^1 \\ &= a - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

- [2] $0 < a \leq 1$ のとき
求める面積は、
- $$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a \{(-x^2 + 2ax) - x^2\} dx + \int_a^1 \{x^2 - (-x^2 + 2ax)\} dx \\ &= -2 \int_0^a x(x-a) dx + \int_a^1 (2x^2 - 2ax) dx \\ &= \frac{a^3}{3} + \left[\frac{2}{3}x^3 - ax^2 \right]_a^1 \\ &= \frac{2a^3}{3} - a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

- (3)
[1] $1 < a$ のとき
(2)より、 $S(a) = a - \frac{2}{3}$ であり、これは単調増加関数であるから、 $1 < a$ において、
- $$S(a) > S(1) = \frac{1}{3}$$

となる。

- [2] $0 < a \leq 1$ のとき
(2)より、 $S(a) = \frac{2a^3}{3} - a + \frac{2}{3}$ である。これより、 $S'(a) = 2a^2 - 1$ であり、
- $$\begin{aligned} S'(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow a &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 < a \leq 1$ の範囲での増減表は、 $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$ をふまえて、

a	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
$S'(a)$		-	0	+	+
$S(a)$		$\searrow$	$\frac{2-\sqrt{2}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

となる。

- [1], [2]より、 $S(a)$ は $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときに最小値 $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$ をとる。