

【I】

【解答】

(1)	ア	イ		
	1	0		
(2)	ウ	エ		
	1	5		
(3)	オ	カ		
	3	0		
(4)	キ	ク	ケ	コ
	2	8	7	0
(5)	サ	シ	ス	
	2	9	0	

【解説】

- (1)
- $$a^2-8a+b+12\leq 0$$
- $$\Leftrightarrow (a-2)(a-6)\leq -b \qquad \cdots \textcircled{1}$$
- と変形できる。 b は正の整数であるから①式の左辺は負、すなわち $a-2$ 、 $a-6$ の符号は異なることが分かる。ここで、
- $$a-2\geq a-6$$
- であるから、
- $$\begin{cases} a-2>0 \\ a-6<0 \end{cases}$$
- $$\Leftrightarrow 2<a<6$$
- $$\therefore a=3, 4, 5$$
- を得る。 $a=3$ のとき、①式より、
- $$(3-2)(3-6)\leq -b$$
- $$\Leftrightarrow b\leq 3$$
- $$\therefore b=1, 2, 3$$
- が得られ、 $a=4$ のとき、①式より、
- $$(4-2)(4-6)\leq -b$$
- $$\Leftrightarrow b\leq 4$$
- $$\therefore b=1, 2, 3, 4$$
- が得られ、 $a=5$ のとき、①式より、
- $$(5-2)(5-6)\leq -b$$
- $$\Leftrightarrow b\leq 3$$
- $$\therefore b=1, 2, 3$$
- が得られる。以上より、条件を満たす a, b の組は全部で、
- $$3+4+3=10 \text{ 通り}$$
- 存在することが分かる。

- (2)
- $$a^3+b^3=3c$$
- $$\Leftrightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)=3c$$
- $$\Leftrightarrow (a+b)^3=3\{c+ab(a+b)\} \qquad \cdots \textcircled{2}$$
- より、 $(a+b)^3$ は3の倍数、すなわち $a+b$ は3の倍数であることが分かる。 $a+b\leq 10$ であるから、
- $$a+b=3, 6, 9$$
- が得られるので、自然数 k ($k=1, 2, 3$)を用いて、
- $$a+b=3k$$
- とおくと、②式は、
- $$27k^3=3(c+3kab)$$
- $$\Leftrightarrow c=3k(3k^2-ab) \qquad \cdots \textcircled{3}$$
- となる。③式より、 a, b, k ($3k^2>ab$)の組に対し c はただ1つ存在することが分かる。以下、 k の値により場合分けを行う。
- [1] $k=1$ のとき
- このとき、
- $$(a, b)=(1, 2), (2, 1)$$
- であり、いずれの組も、
- $$3k^2>ab$$
- を満たす。従って、 $k=1$ の場合に与式を満たす a, b, c の組は2通り存在することが分かる。
- [2] $k=2$ のとき
- このとき、
- $$(a, b)=(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$$
- であり、いずれの組も、
- $$3k^2>ab$$
- を満たす。従って、 $k=2$ の場合に与式を満たす a, b, c の組は5通り存在することが分かる。
- [3] $k=3$ のとき
- このとき、
- $$(a, b)=(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)$$
- であり、いずれの組も、
- $$3k^2>ab$$
- を満たす。従って、 $k=3$ の場合に与式を満たす a, b, c の組は8通り存在することが分かる。
- 以上[1]から[3]より、条件を満たす a, b, c の組は全部で、
- $$2+5+8=15 \text{ 通り}$$
- 存在することが分かる。

- (3)
- $$\log_{10} a+\log_{10} b+\log_{10} 5=5$$
- $$\Leftrightarrow \log_{10} 5ab=\log_{10} 10^5$$
- $$\Leftrightarrow 5ab=10^5$$
- $$\therefore ab=2^5\cdot 5^4 \qquad \cdots \textcircled{4}$$
- を得る。従って、整数 i, j を用いて、
- $$\begin{cases} a=2^i\cdot 5^j \\ b=2^{5-i}\cdot 5^{4+j} \end{cases} \quad (0\leq i\leq 5, 0\leq j\leq 4)$$
- と表される a, b の組の個数を求めればよいので、条件を満たす a, b の組は全部で、
- $$(5+1)\cdot (4+1)=30 \text{ 通り}$$
- 存在することが分かる。

- (4)
- $$\frac{1}{20}\leq \frac{1}{a}\leq \frac{1}{\sqrt{b}}$$
- $$\therefore \sqrt{b}\leq a\leq 20 \quad (\because a>0, b>0)$$
- と変形することができる。これより、ある a に対して条件を満たす b は、
- $$b=1, 2, \dots, a^2$$
- と a^2 個存在するので、条件を満たす a, b の組は全部で、
- $$\sum_{a=1}^{20} a^2=\frac{1}{6}\cdot 20\cdot 21\cdot (2\cdot 20+1)=2870 \text{ 通り}$$
- 存在することが分かる。

- (5)
- $$\begin{aligned} \int_1^5 (6x^2-2ax-b)dx &= \left[2x^3-ax^2-bx \right]_1^5 \\ &= 248-24a-4b \\ &= 4(62-6a-b) \end{aligned}$$
- と変形できるので、
- $$\int_1^5 (6x^2-2ax-b)dx \geq 0$$
- $$\Leftrightarrow 62-6a-b \geq 0$$
- $$\Leftrightarrow b \leq 62-6a$$
- を得る。これより、ある a に対して条件を満たす b は、
- $$b=1, 2, \dots, 62-6a$$
- と $62-6a$ 個存在する。 $b\geq 1$ より $1\leq a\leq 10$ であるから、条件を満たす a, b の組は全部で、
- $$\sum_{a=1}^{10} (62-6a)=62\cdot 10-6\cdot \frac{1}{2}\cdot 10\cdot (10+1)=290 \text{ 通り}$$
- 存在することが分かる。

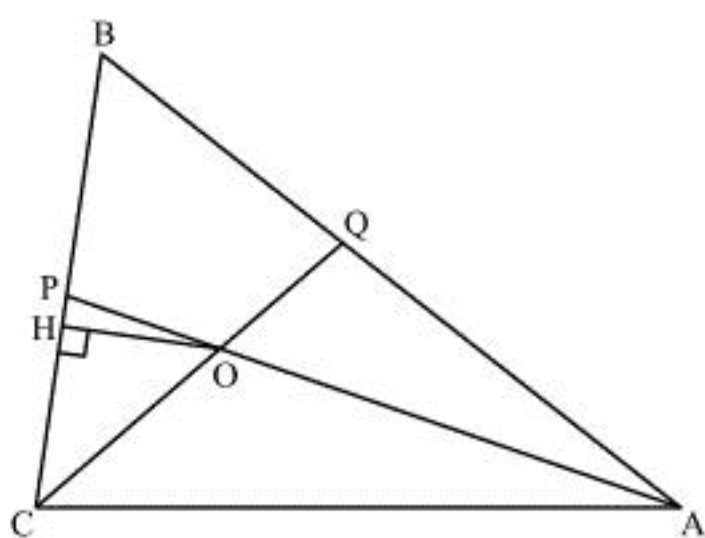
〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ				
	1	7	1	0	3	2	7	7				
(2)	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	
	5	7	1	2	5	7	2	0	5	2	0	

〔解説〕

- (1) 題意より，以下の図のようになっている。



△ABC についての余弦定理より，

$$\cos \angle ACB = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA \cdot CB} = \frac{7^2 + 5^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{1}{7}$$

であり，これより，

$$\sin \angle ACB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ACB} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \quad (\because \sin \angle ACB > 0)$$

を得る。従って，△ABC の面積は，

$$\frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \sin \angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3}$$

と求めることができる。また， $\angle ACQ = \angle BCQ$ より，

$$\cos \angle ACQ = \cos \frac{1}{2} \angle ACB = \sqrt{\frac{\cos \angle ACB + 1}{2}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \quad \left(\because 0 < \angle ACQ < \frac{\pi}{2} \right)$$

を得る。

(2)

$\angle ACQ = \angle BCQ$ より，

$$AQ : BQ = AC : BC = 7 : 5$$

であるから，

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{5\vec{a} + 7\vec{b}}{5 + 7} = \frac{5\vec{a} + 7\vec{b}}{12}$$

である。同様に，

$$CP : PB = AC : AB = 7 : 8$$

より，

$$\overrightarrow{CP} = \frac{7}{15} \vec{b}$$

である。点 O は直線 CQ 上の点であるから実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{CO} = k \overrightarrow{CQ} = \frac{5}{12} k \vec{a} + \frac{7}{12} k \vec{b} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表すことができ，また，点 O は直線 AP 上の点でもあるから実数 t を用いて，

$$\overrightarrow{CO} = (1-t) \overrightarrow{CA} + t \overrightarrow{CP} = (1-t) \vec{a} + \frac{7}{15} t \vec{b} \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表すことができる。 $\vec{a}, \vec{b}$ はいずれも $\vec{0}$ でなく，互いに平行でない 2 つのベクトルであるから，

①，②の係数を比較することで，

$$\begin{cases} \frac{5}{12} k = 1 - t \\ \frac{7}{12} k = \frac{7}{15} t \end{cases} \\ \therefore k = \frac{3}{5}, t = \frac{3}{4}$$

を得る。従って，

$$\overrightarrow{CO} = (1-t) \vec{a} + \frac{7}{15} t \vec{b} = \frac{5\vec{a} + 7\vec{b}}{20}$$

である。点 H は直線 CB 上の点であるから実数 ℓ を用いて，

$$\overrightarrow{CH} = \ell \overrightarrow{CB} = \ell \vec{b}$$

と表すことができるので，条件より，

$$\begin{aligned} & \text{OH} \perp \text{CB} \\ & \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ & \Leftrightarrow (\overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CO}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\ell \vec{b} - \frac{5\vec{a} + 7\vec{b}}{20} \right) \cdot \vec{b} = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\ell - \frac{7}{20} \right) \|\vec{b}\|^2 - \frac{1}{4} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる。ここで，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \angle ACB = 7 \cdot 5 \cdot \frac{1}{7} = 5$$

であるから，これを③に代入することで，

$$\begin{aligned} & \left(\ell - \frac{7}{20} \right) \cdot 5^2 - \frac{1}{4} \cdot 5 = 0 \\ & \therefore \ell = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

を得る。従って，

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CO} = \ell \vec{b} - \frac{5\vec{a} + 7\vec{b}}{20} = \frac{-5\vec{a} + \vec{b}}{20}$$

と求めることができる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	$\triangle$	$\times$	Ξ	Υ	$\sqcup$
	2	3	0	1	2
(2)	$y = 5x^2 - ax - 5$				

〔解説〕

(1)

$$x = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \sin(\theta + 30^\circ) = 2 \sin(\theta + 30^\circ)$$

と表される。 $0^\circ \leq \theta \leq 15^\circ$ より $30^\circ \leq \theta + 30^\circ \leq 45^\circ$ であるから、 x のとり得る値の範囲は、

$$2 \sin 30^\circ \leq x \leq 2 \sin 45^\circ$$

$$\therefore 1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

と分かる。

(2)

$x = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$ の両辺を 2 乗することで、

$$x^2 = 3 \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \sin^2 \theta + \sqrt{3} \sin 2\theta + (1 - \sin^2 \theta)$$

$$\therefore 2 \sin^2 \theta + \sqrt{3} \sin 2\theta = x^2 - 1$$

を得るので、これと $x = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$ を与式に代入することで、

$$y = 5(2 \sin^2 \theta + \sqrt{3} \sin 2\theta) - a(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta)$$

$$= 5(x^2 - 1) - ax$$

$$= 5x^2 - ax - 5$$

と表すことができる。

(3)

(2)で得た式は、

$$y = 5\left(x - \frac{a}{10}\right)^2 - \frac{a^2}{20} - 5$$

と変形できるので、このグラフは頂点 $\left(\frac{a}{10}, -\frac{a^2}{20} - 5\right)$ の下に凸な放物線であることが分かる。

この放物線を C とする。(1)より $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ であるから、この範囲と放物線 C の軸 $x = \frac{a}{10}$ との

位置関係により場合分けを行う。

[1] $\frac{a}{10} \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 10$ のとき

このとき、 C は $x=1$ で最小値

$$y = 5 \cdot 1^2 - a \cdot 1 - 5 = -a$$

をとり、 $x = \sqrt{2}$ で最大値

$$y = 5 \cdot (\sqrt{2})^2 - a \cdot \sqrt{2} - 5 = 5 - \sqrt{2}a$$

をとる。

[2] $1 < \frac{a}{10} < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 10 < a < 5+5\sqrt{2}$ のとき

このとき、 C は $x = \frac{a}{10}$ で最小値

$$y = 5\left(\frac{a}{10} - \frac{a}{10}\right)^2 - \frac{a^2}{20} - 5 = -\frac{a^2}{20} - 5$$

をとり、 $x = \sqrt{2}$ で最大値

$$y = 5 \cdot (\sqrt{2})^2 - a \cdot \sqrt{2} - 5 = 5 - \sqrt{2}a$$

をとる。

[3] $\frac{1+\sqrt{2}}{2} \leq \frac{a}{10} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 5+5\sqrt{2} \leq a < 10\sqrt{2}$ のとき

このとき、 C は $x = \frac{a}{10}$ で最小値

$$y = 5\left(\frac{a}{10} - \frac{a}{10}\right)^2 - \frac{a^2}{20} - 5 = -\frac{a^2}{20} - 5$$

をとり、 $x=1$ で最大値

$$y = 5 \cdot 1^2 - a \cdot 1 - 5 = -a$$

をとる。

[4] $\frac{a}{10} \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow a \geq 10\sqrt{2}$ のとき

このとき、 C は $x = \sqrt{2}$ で最小値

$$y = 5 \cdot (\sqrt{2})^2 - a \cdot \sqrt{2} - 5 = 5 - \sqrt{2}a$$

をとり、 $x=1$ で最大値

$$y = 5 \cdot 1^2 - a \cdot 1 - 5 = -a$$

をとる。

以上[1]から[4]より、 y の最小値は

$$a \leq 10 \text{ のとき } y = -a$$

$$10 < a < 10\sqrt{2} \text{ のとき } y = -\frac{a^2}{20} - 5$$

$$a \geq 10\sqrt{2} \text{ のとき } y = 5 - \sqrt{2}a$$

であり、 y の最大値は

$$a < 5+5\sqrt{2} \text{ のとき } y = 5 - \sqrt{2}a$$

$$a \geq 5+5\sqrt{2} \text{ のとき } y = -a$$

と分かる。

$$(\text{答}) \text{ 最小値: } y = -a \ (a \leq 10), \ y = -\frac{a^2}{20} - 5 \ (10 < a < 10\sqrt{2}), \ y = 5 - \sqrt{2}a \ (a \geq 10\sqrt{2})$$

$$\text{最大値: } y = 5 - \sqrt{2}a \ (a < 5+5\sqrt{2}), \ y = -a \ (a \geq 5+5\sqrt{2})$$