

【Ⅰ】

〔解答〕

1	(1)	(2)
	Q	Z
2	(3)	(4)
	E	T
3	(5)	(6)
	E	C

〔解説〕

1.

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\tan^2\theta-4\tan\theta+\sqrt{3}&=0 \\ \Leftrightarrow (\tan\theta-\sqrt{3})\left(\tan\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)&=0\end{aligned}$$

となるが、 $0\leq\theta<45^\circ$ より $0\leq\tan\theta<1$ であるから、

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \therefore\theta&=30^\circ\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{cases}\sin\theta=\sin30^\circ=\frac{1}{2} \\ \cos\theta=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

である。

2.

※(3)は出題範囲から逸脱した問題であり、全員に得点が与えられた。

得点は2以上5以下である。得点が s となる確率を $P(s)$ とする。

得点が2となるのは1と2のカードを引くときであるから

$$P(2)=\frac{{}_2P_1}{{}_5P_2}=\frac{1}{10}$$

である。得点が3となるのは、選んだ2枚のカードの組み合わせが

$$(1,3), (2,3)$$

のいずれかとなるときであるから

$$P(3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

である。得点が4となるのは、選んだ2枚のカードの組み合わせが

$$(1,4), (2,4), (3,4)$$

のいずれかとなるときであるから

$$P(4)=\frac{3}{10}$$

である。以上より

$$P(5)=1-\sum_{s=2}^4P(s)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

となるから、得点の期待値は

$$\sum_{s=2}^5sP(s)=\frac{1}{10}(2+6+12+20)=4$$

である。 $a=1,3$ のとき、 $a+b$ が偶数となるのは b が a 以外の奇数のときであるから、このときの確率は

$$\frac{2\times2}{{}_5P_2}=\frac{1}{5}$$

である。また、 $a=2$ のとき、 $a+b$ が偶数となるのは $b=4$ のときであるから、このときの確率は

$$\frac{1}{{}_5P_2}=\frac{1}{20}$$

である。よって $a\leq3$ かつ $a+b$ が偶数となる確率は

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}$$

である。

3.

$$\begin{aligned}f(x)\cdot f(x)&=9 \\ \Leftrightarrow f(x)&=\pm3\end{aligned}$$

となる。 $f(x)=3$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{\log_2x+1}{\log_2x-1}&=3 \\ \Leftrightarrow\log_2x+1&=3(\log_2x-1) \\ \Leftrightarrow\log_2x&=2 \\ \therefore x&=4\end{aligned}$$

である。 $f(x)=-3$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{\log_2x+1}{\log_2x-1}&=-3 \\ \Leftrightarrow\log_2x+1&=-3(\log_2x-1) \\ \Leftrightarrow\log_2x&=\frac{1}{2} \\ \therefore x&=\sqrt{2}\end{aligned}$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

1	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ							
	0	2	1	1	2	1	4							
2	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	
	1	1	2	1	1	2	1	6	1	1	2	0	2	

〔解説〕

1.

$$f(x)-g(x)=h(x) \text{ とおくと}$$

$$h(x)=x^2(x-1)^2-2x(x-1)^2=x(x-2)(x-1)^2$$

であるから、

$$f(x) \leq g(x)$$

$$\Leftrightarrow h(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(x-1)^2 \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2$$

となる。また、

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^2-2x)(x-1)^2 \\ &= \{(x-1)^2-1\}(x-1)^2 \\ &= (x-1)^4-(x-1)^2 \\ &= \left\{(x-1)^2-\frac{1}{2}\right\}^2-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

となるから、 $h(x)$ は

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

のとき最小値 $-\frac{1}{4}$ をとる。

2.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x(x-a)(x-b)dx \\ &= \int (x^3-(a+b)x^2+abx)dx \\ &= \frac{1}{4}x^4-\frac{a+b}{3}x^3+\frac{ab}{2}x^2+C \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} F(a)-F(0) &= \frac{1}{4}a^4-\frac{a+b}{3}a^3+\frac{ab}{2}a^2 \\ &= -\frac{a^4}{12}+\frac{a^3b}{6} \\ &= -\frac{a^2}{12}(a^2-2ab) \\ &= \frac{1}{12}a^2b^2-\frac{1}{12}a^2(b-a)^2 \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} F(b)-F(0) &= \frac{1}{4}b^4-\frac{a+b}{3}b^3+\frac{ab}{2}b^2 \\ &= -\frac{b^4}{12}+\frac{ab^3}{6} \\ &= -\frac{b^2}{12}(b^2-2ab) \\ &= \frac{1}{12}a^2b^2-\frac{1}{12}b^2(b-a)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} S &= \int_0^b |f(x)|dx \\ &= \int_0^a f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_0^a f(x)dx - \left\{ \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx \right\} \\ &= 2 \int_0^a f(x)dx - \int_0^b f(x)dx \\ &= 2\{F(a)-F(0)\} - \{F(b)-F(0)\} \\ &= 2\left\{ \frac{1}{12}a^2b^2 - \frac{1}{12}a^2(b-a)^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{12}a^2b^2 - \frac{1}{12}b^2(b-a)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{12}a^2b^2 - \frac{1}{6}a^2(b-a)^2 + \frac{1}{12}b^2(b-a)^2 \end{aligned}$$

となる。よって $2a=b$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{12}a^2(2a)^2 - \frac{1}{6}a^2(2a-a)^2 + \frac{1}{12}(2a)^2(2a-a)^2 \\ &= \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{6}a^4 + \frac{1}{3}a^4 \\ &= \frac{1}{2}a^4 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} S &\leq ab \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}a^4 &\leq 2a^2 \\ \Leftrightarrow a^2(a-2)(a+2) &\leq 0 \\ \therefore 0 < a &\leq 2 (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

1. (1)

$50 \div 2 = 25$ より, 25 個である。

(答) 25 個

(2)

50 以下の自然数のうち, 5 の倍数は

$$5, 10, 15, \dots, 50$$

の 10 個である。よってその総和は

$$\frac{50+5}{2} \times 10 = 275$$

である。

(答) 275

(3)

$50 = 2 \times 5^2$ であるから, 自然数 n について n が 2 の倍数か 5 の倍数のとき, $\frac{n}{50}$ は既約分数でない。このような n の総和は

$$\frac{50+2}{2} \times 25 + 275 - \frac{50+10}{2} \times 5 = 775$$

である。よって 1 未満の正の数で, 分母が 50 の既約分数の総和は

$$\sum_{n=1}^{50} \frac{n}{50} - \frac{775}{50} = \frac{1}{50} \left(\frac{51}{2} \times 50 - 775 \right) = 10$$

である。

(答) 10

2. (1)

n 以下で p の倍数の個数は

$$\frac{n}{p} = p^{a-1} q^b$$

であり, q の倍数の個数は

$$\frac{n}{q} = p^a q^{b-1}$$

であり, pq の倍数の個数は

$$\frac{n}{pq} = p^{a-1} q^{b-1}$$

である。よって, n 以下で p の倍数でも q の倍数でもない自然数の個数は

$$\begin{aligned} p^a q^b - (p^a q^{b-1} + p^{a-1} q^b - p^{a-1} q^{b-1}) &= p^{a-1} q^{b-1} (pq - p - q + 1) \\ &= p^{a-1} q^{b-1} (p-1)(q-1) \end{aligned}$$

である。

(答) $p^{a-1} q^{b-1} (p-1)(q-1)$

(2)

n 以下の自然数のうち, p の倍数であるものの総和は

$$\frac{p^a q^b + p}{2} \times p^{a-1} q^b = \frac{p^a q^b}{2} (p^{a-1} q^b + 1)$$

であり, q の倍数であるものの総和は

$$\frac{p^a q^b + q}{2} \times p^a q^{b-1} = \frac{p^a q^b}{2} (p^a q^{b-1} + 1)$$

であり, pq の倍数であるものの総和は

$$\frac{p^a q^b + pq}{2} \times p^{a-1} q^{b-1} = \frac{p^a q^b}{2} (p^{a-1} q^{b-1} + 1)$$

であるから, p または q の倍数であるものの総和は

$$\begin{aligned} & \frac{p^a q^b}{2} (p^{a-1} q^b + 1) + \frac{p^a q^b}{2} (p^a q^{b-1} + 1) - \frac{p^a q^b}{2} (p^{a-1} q^{b-1} + 1) \\ &= \frac{p^{a-1} q^{b-1}}{2} (p^a q^{b+1} + pq + p^{a+1} q^b + pq - p^a q^b - pq) \\ &= \frac{p^{a-1} q^{b-1}}{2} (p^a q^{b+1} + p^{a+1} q^b + pq - p^a q^b) \\ &= \frac{p^a q^b}{2} \{1 + p^{a-1} q^{b-1} (p+q-1)\} \end{aligned}$$

である。よって 1 以下の正の数のうち, 分母が n で既約分数でないものの総和は

$$\frac{1 + p^{a-1} q^{b-1} (p+q-1)}{2}$$

である。これは $\frac{n}{n} = 1$ を含むから, 求める総和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} - \frac{1 + p^{a-1} q^{b-1} (p+q-1)}{2} &= \frac{p^a q^b + 1 - 1 - p^{a-1} q^{b-1} (p+q-1)}{2} \\ &= \frac{p^{a-1} q^{b-1}}{2} (p-1)(q-1) \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{p^{a-1} q^{b-1}}{2} (p-1)(q-1)$