

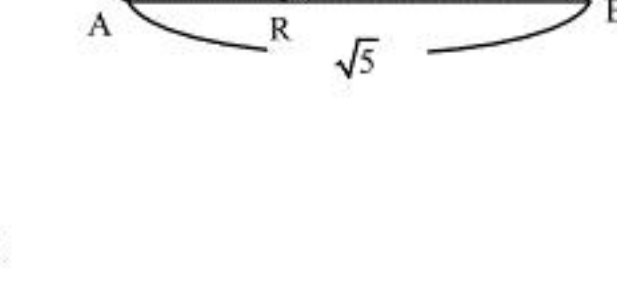
【I】

【解答】

(1)	ア	イ								
	5	6								
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク				
	2	3	1	3	1	4				
(3)	ケ	コ	サ	シ	ス	セ				
	1	0	1	4	1	5				
(4)	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	
	2	4	1	8	9	6	4	2	6	

【解説】

- (1)
- 解と係数の関係より、
- $$\alpha+\beta=-p,\alpha\beta=q$$
- が成り立つ。
- $$f(\alpha)=\beta\Leftrightarrow\alpha^2+4\alpha+1=\beta\cdots\cdots\textcircled{1}$$
- $$f(\beta)=\alpha\Leftrightarrow\beta^2+4\beta+1=\alpha\cdots\cdots\textcircled{2}$$
- である。①+②より、
- $$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+4(\alpha+\beta)+2&=\alpha+\beta\\\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+2&=0\\\Leftrightarrow p^2-3p-2q+2&=0\cdots\cdots\textcircled{3}\end{aligned}$$
- であり、①-②より、
- $$\begin{aligned}\alpha^2-\beta^2+4(\alpha-\beta)&=\beta-\alpha\\\Leftrightarrow(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+5(\alpha-\beta)&=0\\\Leftrightarrow(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+5)&=0\\\Leftrightarrow\alpha+\beta+5&=0(\because\alpha\neq\beta)\\\Leftrightarrow p&=5\cdots\cdots\textcircled{4}\end{aligned}$$
- となる。④を③に代入して、
- $$\begin{aligned}2q&=5^2-3\cdot5+2\\\Leftrightarrow q&=6\end{aligned}$$
- と求めることができる。

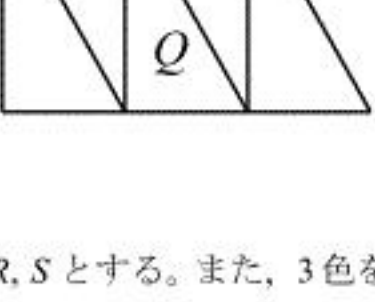
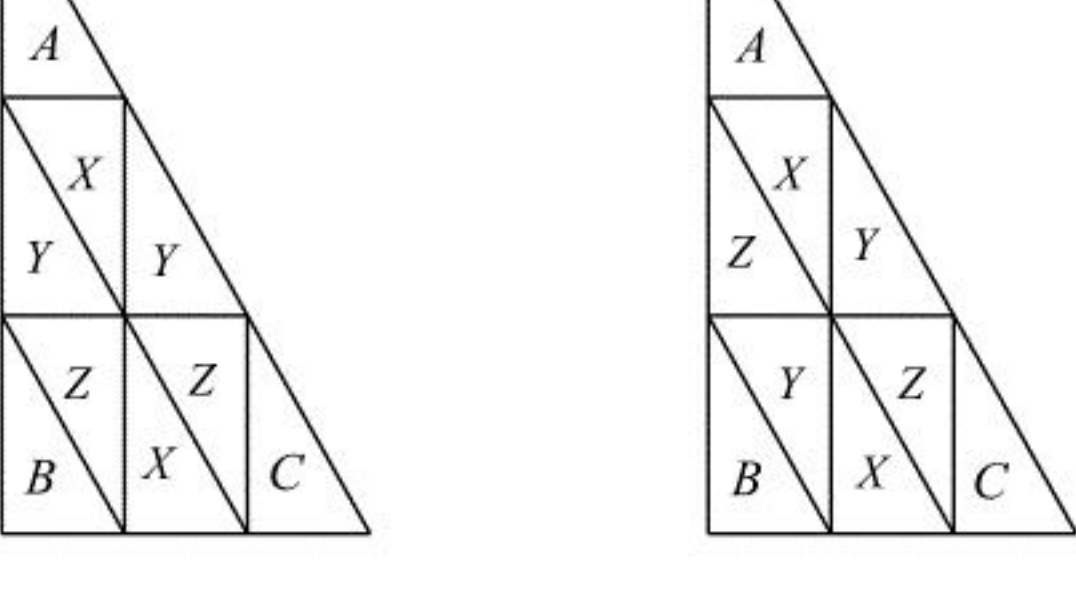
- (2)
- 
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AP}}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{\text{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AC}}\\\overrightarrow{\text{AQ}}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{\text{AC}}\end{aligned}$$
- であるから、
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{PQ}}&=\overrightarrow{\text{AQ}}-\overrightarrow{\text{AP}}\\&=-\frac{2}{3}\overrightarrow{\text{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AC}}\end{aligned}$$
- である。また、
- $$\overrightarrow{\text{AR}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}$$
- より、
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{PR}}&=\overrightarrow{\text{AR}}-\overrightarrow{\text{AP}}\\&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AC}}\end{aligned}$$
- と表すことができる。
- $$|\overrightarrow{\text{AB}}|=\sqrt{5},|\overrightarrow{\text{AC}}|=3$$
- より、 $\overrightarrow{\text{PQ}}$ と $\overrightarrow{\text{PR}}$ が垂直であるとき、
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{PQ}}\cdot\overrightarrow{\text{PR}}&=0\\\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{\text{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AC}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AC}}\right)&=0\\\Leftrightarrow\frac{2}{9}|\overrightarrow{\text{AB}}|^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}-\frac{1}{9}|\overrightarrow{\text{AC}}|^2&=0\\\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}&=-1\end{aligned}$$
- が成り立つ。よって、
- $$\begin{aligned}|\overrightarrow{\text{BC}}|^2&=|\overrightarrow{\text{AC}}-\overrightarrow{\text{AB}}|^2\\&=|\overrightarrow{\text{AC}}|^2-2\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}+|\overrightarrow{\text{AB}}|^2\\&=16\end{aligned}$$
- となるから、
- $$\text{BC}=4$$
- である。

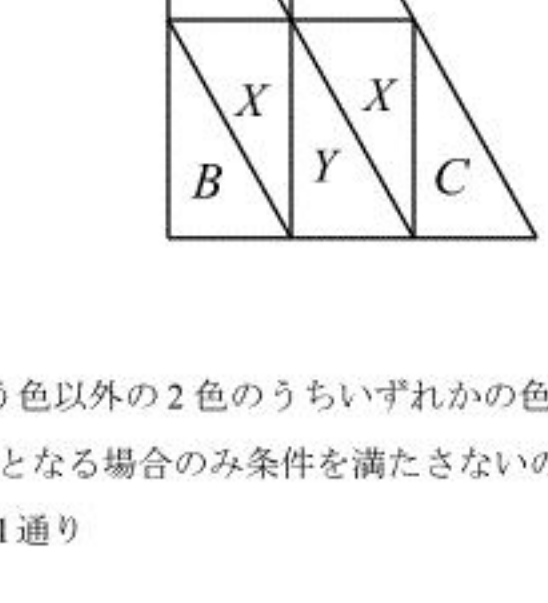
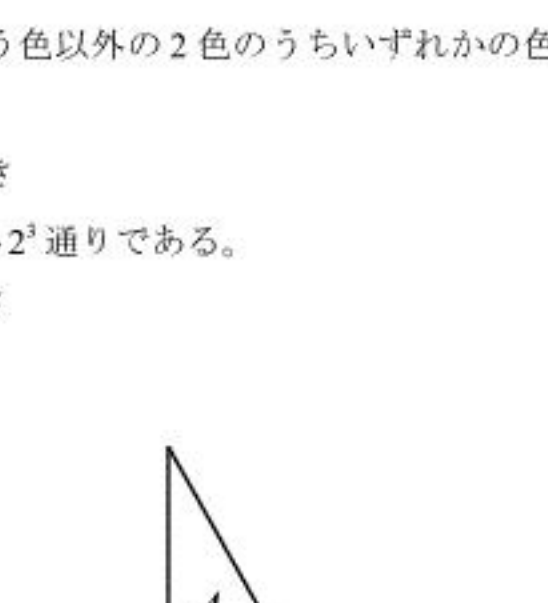
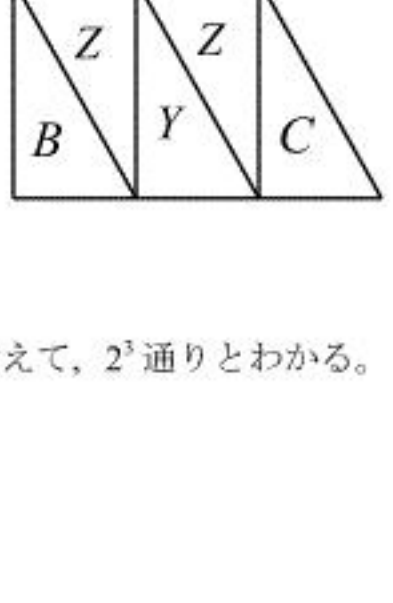
- (3)
- $x^2\geq 0$ であるから、
- $$\begin{aligned}f(x)&\geq 0\\\Leftrightarrow 1-x&\geq 0\\\Leftrightarrow x&\leq 1\end{aligned}$$
- である。
- $$\sqrt{x^2(1-x)}=0\Leftrightarrow x=0,1$$
- より、 $y=\sqrt{f(x)}$ と x 軸は $x=0,1$ で交わるから、
- $$a=0,b=1$$
- である。よって S は、
- $$\begin{aligned}S&=\int_0^1\sqrt{x^2(1-x)}dx\\&=\int_0^1x\sqrt{1-x}dx\end{aligned}$$
- となる。ここで $1-x=t$ とすると、
- $$dx=-dt$$
- であり、

x	0	$\rightarrow$	1
t	1	$\rightarrow$	0

- となるから、
- $$\begin{aligned}S&=\int_1^0(1-t)\sqrt{t}(-dt)\\&=\int_0^1\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)dt\\&=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1\\&=\frac{4}{15}\end{aligned}$$
- と求めることができる。

- (4)
- (a)
- 
- 上図のように各小三角形を A,B,C,D とする。
- [1] 2色を用いる場合
- B,C,D は同じ色であり、用いる2色の選び方は ${}_3\text{C}_2$ 通りであるから、
- $$2!\cdot{}_3\text{C}_2=6\text{通り}$$
- である。
- [2] 3色を用いる場合
- $(B,C),(C,D),(B,D)$ のいずれかの組み合わせが同じ色であり、それぞれに対して塗り分け方は3!通り存在するから、
- $$3!\cdot3=18\text{通り}$$
- である。
- 以上[1],[2]より、塗り方の総数は、
- $$6+18=24\text{通り}$$
- である。

- (b)
- 
- 上図のように各小三角形を P,Q,R,S とする。また、3色を X,Y,Z と表す。 P,Q が同じ色 X で塗られるとき、以下の2つのパターンが考えられる。
- 

- A,B,C にはそれぞれ隣り合う色以外の2色のうちいずれかを塗ればよい。 X,Y,Z と赤、青、黄の対応のさせ方は3!通りであるから、塗り分け方の総数は、
- $$2^3\cdot2\cdot3!=96\text{通り}$$
- である。次に、 P を X 、 Q を Y で塗るときを考える。
- [1] $(R,S)=(X,X)$ のとき
- 
- A,B,C には隣り合う色以外の2色のうちいずれかの色を塗ればよいが、 P,R,S 以外の小三角形がすべて Y となる場合のみ条件を満たさないで、
- $$2^2\cdot2^3-1=4\cdot2^3-1\text{通り}$$
- である。
- [2] $(R,S)=(X,Z)$ のとき
- 
- A,B,C には隣り合う色以外の2色のうちいずれかの色を塗ればよいので、 $2\cdot2^3$ 通りである。
- [3] $(R,S)=(Z,X)$ のとき
- [2]と同様に考えて $2\cdot2^3$ 通りである。
- [4] $(R,S)=(Z,Z)$ のとき
- 
- A,B,C の色の組み合わせを考えると、 2^3 通りとわかる。
- 以上より、塗り分け方の総数は、
- $$(9\cdot2^3-1)\cdot3!=426\text{通り}$$
- である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

あ	い	う	え	お	か
$\frac{x^2-2}{x^2}$	$\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x^2}$	$\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}}$	2	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{x^3}{4\sqrt{x^2-1}}$

〔解説〕

△ABCに余弦定理を用いると、

$$\cos \angle BAC = \frac{x^2 + x^2 - 2^2}{2 \cdot x \cdot x} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

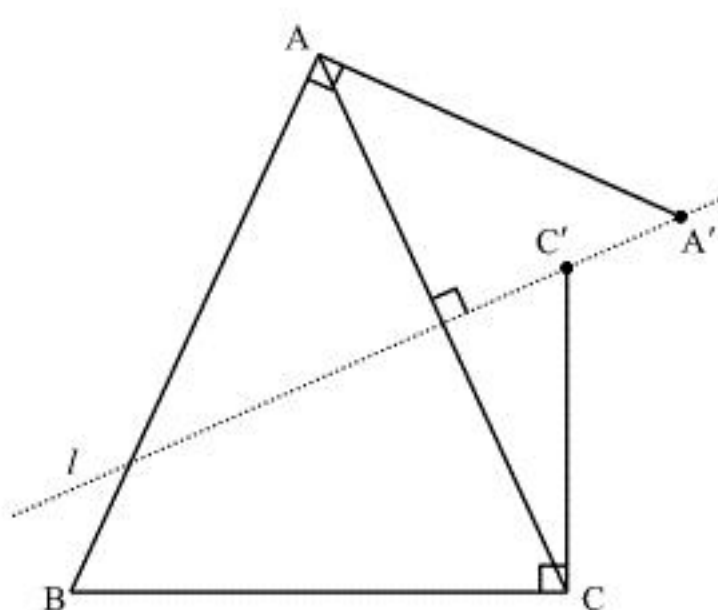
と求めることができる。また、 $0^\circ < \angle BAC < 180^\circ$ より $\sin \angle BAC > 0$ であるから、

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - 2}{x^2} \right)^2} = \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}$$

である。△ABCの外接円の半径を R とすると、正弦定理を用いることで、

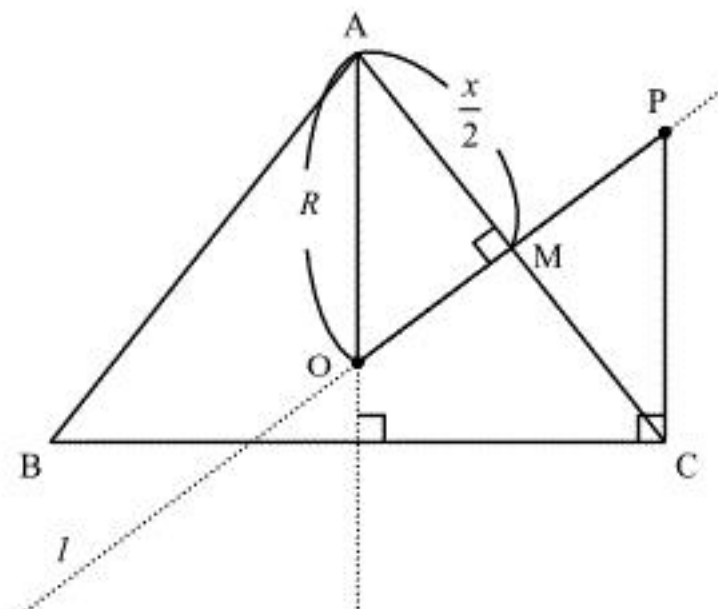
$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAC} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 - 1}}$$

と求まる。



線分ACの垂直二等分線を l とする。点Aを通り辺ABに垂直な直線と l の交点を A' 、点Cを通り辺BCに垂直な直線と l の交点を C' とすると、Pは A' 、 C' のうち、△ABCの外部にあり、かつ辺ACからより離れている方の点である。

[1] $1 < x \leq 2$ のとき

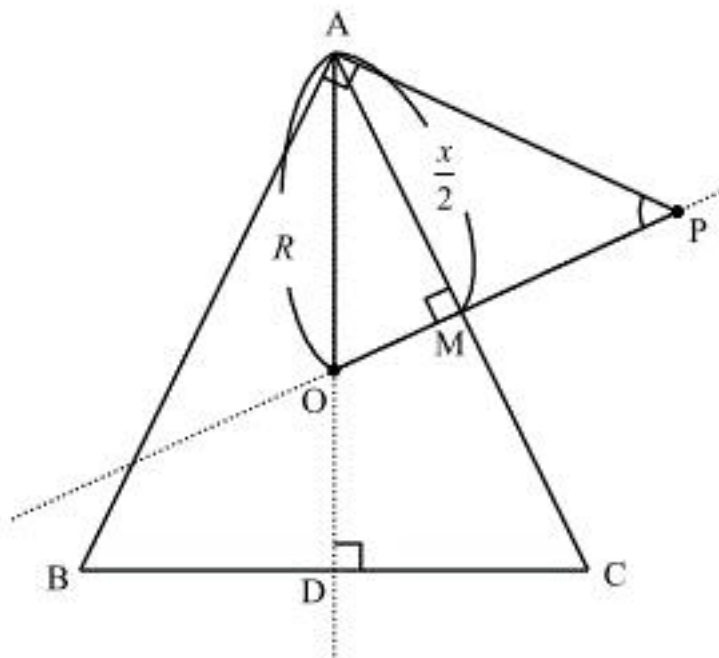


外心をOとすると、OはAから辺BCに下した垂線と l の交点である。また、辺ACの中点をMとすると、O、Pは線分ACの垂直二等分線上にあるので3点O、M、Pは同一直線上に存在する。△OAM≡△PCMであるから、求める距離OPは、

$$\begin{aligned} OP &= 2OM \\ &= 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= 2\sqrt{\frac{x^4}{4(x^2-1)} - \frac{x^2}{4}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

である。

[2] $x \geq 2$ のとき



$$\angle APM = 90^\circ - \angle MAP = \angle BAC$$

であり、AからBCへの垂線の足をDとすると△AMO∽△ADCであるから、

$$\angle AOP = \angle ACB$$

である。これらより、△PAO∽△ABCであるから、

$$\begin{aligned} CA : BC &= OP : AO \\ \Leftrightarrow x : 2 &= OP : R \end{aligned}$$

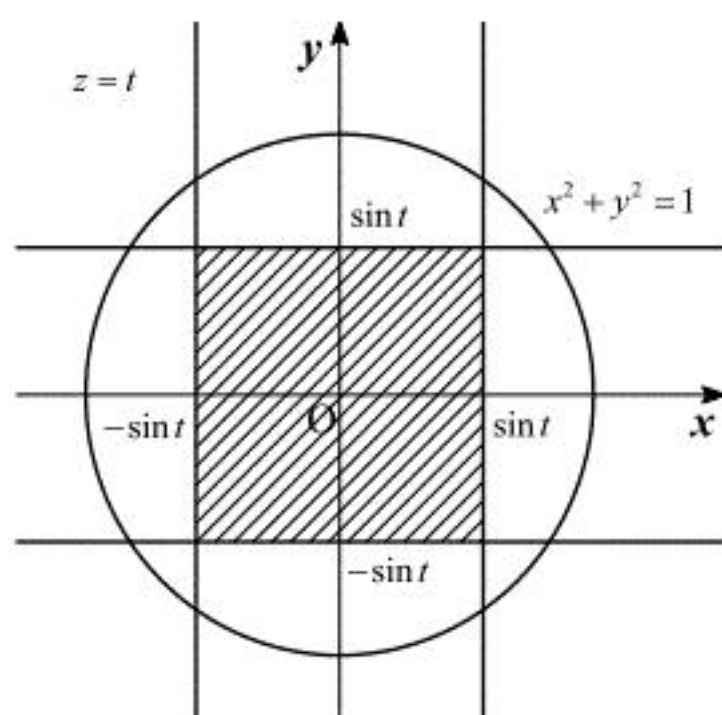
$$\therefore OP = \frac{xR}{2} = \frac{x^3}{4\sqrt{x^2-1}}$$

と求めることができる。

〔Ⅲ〕

(1)

$$[1] \quad 0 \leq \sin t < \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \text{ のとき}$$

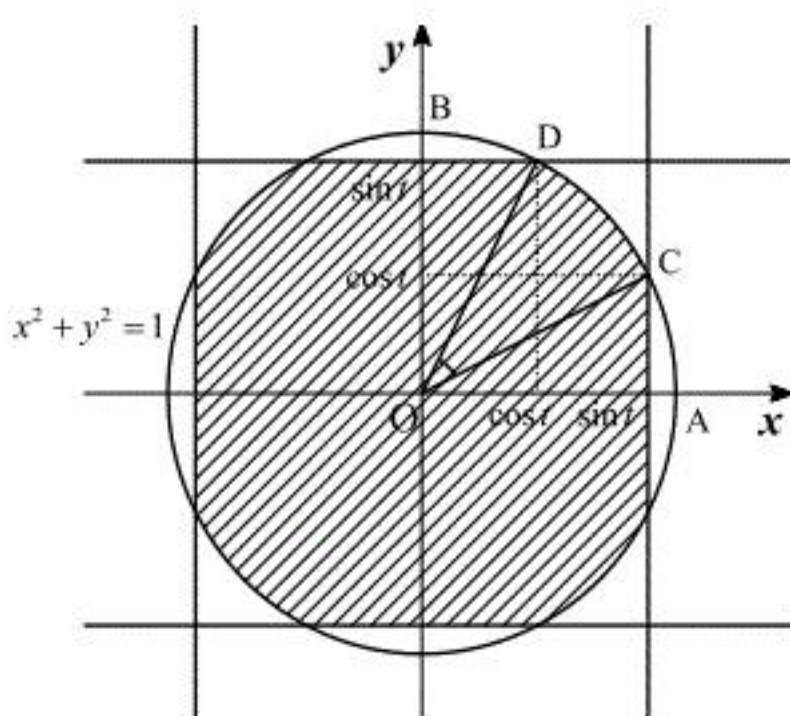


K の断面は図の斜線部分であり、

$$S(t) = (2 \sin t)^2 = 4 \sin^2 t$$

である。

$$[2] \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin t \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$



$A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(\sin t, \cos t)$, $D(\cos t, \sin t)$ とすると、

$$\angle AOD = \angle COB = t$$

であるから、

$$\angle COD = \angle AOD + \angle COB - \frac{\pi}{2} = 2t - \frac{\pi}{2}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} S(t) &= 4 \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \left(2t - \frac{\pi}{2} \right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \sin t \cos t \right\} \\ &= 4(t + \sin t \cos t) - \pi \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S(t) = \begin{cases} 4 \sin^2 t & (0 \leq t < \frac{\pi}{4} \text{ のとき}) \\ 4(t + \sin t \cos t) - \pi & (\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \sin^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2(1 - \cos 2t) dt \\ &= [2t - \sin 2t]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{\pi}{2} - 1$$

(3)

$$W = V + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4t + 4 \sin t \cos t - \pi) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4t + 2 \sin 2t - \pi) dt \\ &= \left[2t^2 - \cos 2t - \pi t \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{8} + 1 \end{aligned}$$

であるから、

$$W = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad W = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2}$$