

〔I〕

〔解答〕

1	2	3
F	B	B

〔解説〕

2 次関数 $y = x^2 - 2mx + 3m + 10$ の式を平方完成すると,

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2mx + 3m + 10 \\ &= (x - m)^2 - m^2 + 3m + 10 \end{aligned}$$

となるから, この 2 次関数のグラフの軸は直線 $x = m$ であり, 頂点の y 座標は $-m^2 + 3m + 10$

である。また, $f(x) = x^2 - 2mx + 3m + 10$ とおくと, $f(0) > 0$, $f(10) > 0$ が必要である。すなわち,

$$\begin{aligned} f(0) &= 3m + 10 > 0 \\ \therefore m &> -\frac{10}{3} \\ f(10) &= 100 - 20m + 3m + 10 > 0 \\ \Leftrightarrow -17m &> -110 \\ \therefore m &< \frac{110}{17} \end{aligned}$$

である。ここで求まった範囲 $-\frac{10}{3} < m < \frac{110}{17}$ のうち $0 < m < \frac{110}{17}$ では, 頂点が $0 \leq x \leq 10$ の範囲

に含まれているから, 頂点の y 座標について $-m^2 + 3m + 10 > 0$ が成り立てば十分である。すなわち,

$$\begin{aligned} -m^2 + 3m + 10 &> 0 \\ \Leftrightarrow -(m - 5)(m + 2) &> 0 \\ \therefore -2 &< m < 5 \end{aligned}$$

であればよい。また, $-\frac{10}{3} < m \leq 0$ のときこの 2 次関数は $0 \leq x \leq 10$ の範囲で単調に増加す

るため, $f(0) > 0$ が与えられていれば十分である。以上から, 求める範囲は $-\frac{10}{3} < m < 5$ となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

101
$0 < x < 81$

〔解説〕

真数条件より $x > 0$ とわかる。また、 a と b について、

$$b = \log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{a}{2}$$

が成り立つ。これを不等式に代入すると、

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2^{-a} - 2 \cdot 2^{-2b} - \frac{1}{8} &> 0 \\ \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{-a} - 2 \cdot 2^{-a} - \frac{1}{8} &> 0 \\ \Leftrightarrow 2^{-a} &> \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow -a &> -4 \\ \therefore a &< 4 \end{aligned}$$

となる。 $a = \log_3 x$ から、

$$\begin{aligned} a &< 4 \\ \Leftrightarrow 0 &< x < 3^4 \\ \therefore 0 &< x < 81 \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

4	5
C	E

〔解説〕

まず、すべての並べ方について考える。10箇所には並べるうち4箇所を選びそこに○の記号が描かれたカードを配置すればよいから、

$${}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \text{ (通り)}$$

である。○の記号が描かれたカードが3枚以上連続しない並べ方の場合の数は、3枚以上連続する並べ方を210通りから引けば求められる。

[1] ○の記号が描かれたカードが4枚連続する場合

△の記号が描かれたカードが6枚並んだ状態で、それぞれのカードの間または両端の7箇所のうちの1つに○の記号が描かれたカードを4枚連続並べればよい。したがって7通りである。

[2] ○の記号が描かれたカードが3枚連続する場合

△の記号が描かれたカードが6枚並んだ状態で、それぞれのカードの間または両端の7箇所のうちの1つに○の記号が描かれたカードを3枚連続並べ、残った6箇所のうちの1つに残りのカード1枚を置けばよい。したがって、

$$7 \cdot 6 = 42 \text{ (通り)}$$

である。

以上から、

$$210 - (7 + 42) = 161 \text{ (通り)}$$

である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1)	6		
	F		
(2)	7	8	9
	G	E	F
(3)	10	11	
	A	F	

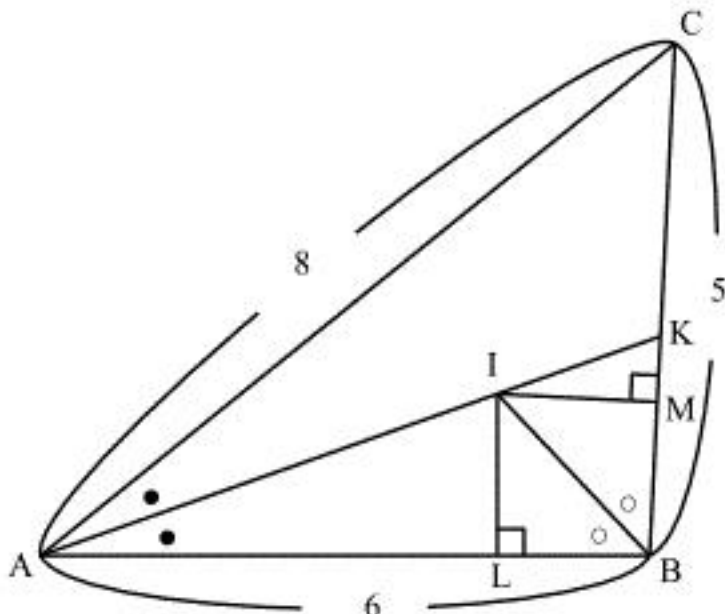
〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}|\overline{BC}|^2 &= 5^2 \\ \Leftrightarrow |\overline{AC} - \overline{AB}|^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow |\overline{AC}|^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} + |\overline{AB}|^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= 8^2 + 6^2 - 25 \\ \therefore \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= \frac{75}{2}\end{aligned}$$

である。

(2)



線分 AK は $\angle BAC$ の二等分線であるから、

$$BK:CK = AB:AC = 3:4$$

である。したがって、

$$\overline{AK} = \frac{4}{3+4}\overline{AB} + \frac{3}{3+4}\overline{AC} = \frac{4}{7}\overline{AB} + \frac{3}{7}\overline{AC}$$

となる。また、線分 BI は $\angle ABK$ の二等分線であるから、

$$AI:KI = BA:BK = 6:5 \cdot \frac{3}{7} = 14:5$$

である。したがって、

$$\overline{AI} = \frac{14}{14+5}\overline{AK} = \frac{14}{19}\overline{AK} \left(= \frac{8}{19}\overline{AB} + \frac{6}{19}\overline{AC} \right)$$

となる。

(3)

$\overline{AL} = k\overline{AB}$ ($0 < k < 1$) とおくと、

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{IL} &= \overline{AB} \cdot (\overline{AL} - \overline{AI}) \\ &= \overline{AB} \cdot \left(k\overline{AB} - \frac{8}{19}\overline{AB} - \frac{6}{19}\overline{AC} \right) \\ &= \left(k - \frac{8}{19} \right) \cdot 6^2 - \frac{6}{19} \cdot \frac{75}{2} \\ &= 6 \left(6k - \frac{96+75}{38} \right) \\ &= 6 \left(6k - \frac{9}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。 $\overline{AB} \cdot \overline{IL} = 0$ より、

$$6k - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$$

であるから、

$$\overline{AL} = \frac{3}{4}\overline{AB}$$

となる。また、 $\overline{BM} = m\overline{BC}$ ($0 < m < 1$) とおくと、

$$\begin{aligned}\overline{BC} \cdot \overline{IM} &= \overline{BC} \cdot (\overline{AB} + \overline{BM} - \overline{AI}) \\ &= \overline{BC} \cdot \left(\overline{AB} + m\overline{BC} - \frac{8}{19}\overline{AB} - \frac{6}{19}\overline{AC} \right) \\ &= 25m + \frac{1}{19}(\overline{AC} - \overline{AB}) \cdot (11\overline{AB} - 6\overline{AC}) \\ &= 25m + \frac{1}{19} \left(17 \cdot \frac{75}{2} - 11 \cdot 36 - 6 \cdot 64 \right) \\ &= 25m - \frac{1}{19} \cdot \frac{285}{2} \\ &= 5 \left(5m - \frac{3}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。 $\overline{BC} \cdot \overline{IM} = 0$ より、

$$5m - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{10}$$

であるから、

$$\overline{BM} = \frac{3}{10}\overline{BC}$$

である。以上から、

$$\begin{aligned}\overline{LM} &= \overline{AM} - \overline{AL} \\ &= \overline{AB} + \overline{BM} - \overline{AL} \\ &= \overline{AB} + \frac{3}{10}(\overline{AC} - \overline{AB}) - \frac{3}{4}\overline{AB} \\ &= -\frac{1}{20}\overline{AB} + \frac{3}{10}\overline{AC}\end{aligned}$$

である。

〔V〕

〔解答〕

12	13	102
1	1	683

〔解説〕

x^3 を x^2+x-2 で割ると、

$$x^3=(x-1)(x^2+x-2)+3x-2$$

より、商 $x-1$ 、余り $3x-2$ となる。すなわち $(a_2, b_2)=(3, -2)$ である。また、定義から、

$$x^{n+1}=(x^2+x-2)Q_n(x)+a_nx+b_n$$

である。両辺に x をかけて整理すると、

$$\begin{aligned} x^{n+2} &= x(x^2+x-2)Q_n(x)+a_nx^2+b_nx \\ &= (x^2+x-2)\{xQ_n(x)+a_n\}-(x-2)a_n+b_nx \\ &= (x^2+x-2)\{xQ_n(x)+a_n\}+(b_n-a_n)x+2a_n \end{aligned}$$

となるので、これにより、

$$\begin{cases} a_{n+1}=b_n-a_n \\ b_{n+1}=2a_n \end{cases}$$

が成り立つ。2式より、

$$a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

となるので、①は

$$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n) \\ a_{n+2}+2a_{n+1}=a_{n+1}+2a_n \end{cases}$$

とそれぞれ変形できる。 $x^2-(x^2+x-2)=-x+2$ より $a_1=-1$ であるから、

$$\begin{cases} a_{n+1}-a_n=(-2)^{n-1}\{3-(-1)\}=(-2)^{n+1} \\ a_{n+1}+2a_n=a_2+2a_1=1 \end{cases}$$

となる。2式より、

$$a_n=\frac{1}{3}\{1-(-2)^{n+1}\}$$

である。したがって、

$$a_{10}=\frac{1-(-2)^{11}}{3}=\frac{2049}{3}=683$$

となる。

〔別解〕

(12, 13 までは同じ)

$$\begin{aligned} x^{11} &= (x^2+x-2)Q_{10}(x)+a_{10}x+b_{10} \\ \Leftrightarrow x^{11} &= (x+2)(x-1)Q_{10}(x)+a_{10}x+b_{10} \qquad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。②に $x=-2, 1$ をそれぞれ代入すると、

$$\begin{cases} (-2)^{11}=-2a_{10}+b_{10} & \cdots \textcircled{3} \\ 1=a_{10}+b_{10} & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

となるので、④-③より、

$$\begin{aligned} 3a_{10} &= 1-(-2)^{11} \\ \therefore a_{10} &= \frac{2049}{3}=683 \end{aligned}$$

と求めることができる。

〔VI〕

〔I 解答〕

14	15	103
H	B	$3x^2 - 4x + 1$

〔解説〕

①より,

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (at^2 + bt + c) dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 (at^2 + c) dt \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{a}{3} t^3 + ct \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} a + \frac{3}{2} c \end{aligned}$$

$$\therefore a = 3c$$

となる。また, $f'(x) = 2ax + b$ であるから, ②より,

$$\begin{aligned} b &= -2f'(1) \\ &= -2(2a + b) \\ &= -2b - 4 \cdot 3c \\ &= -2b - 12c \end{aligned}$$

$$\therefore b = -4c$$

となる。ここで, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 8x - 11$ が接するには,

$$3cx^2 - 4cx + c = 8x - 11 \quad \cdots (*)$$

が重解を持てばよい。

$$(*) \Leftrightarrow 3cx^2 - 2(2c + 4)x + c + 11 = 0$$

であるから, 判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (2c + 4)^2 - 3c(c + 11) \\ &= 4c^2 + 16c + 16 - 3c^2 - 33c \\ &= c^2 - 17c + 16 \\ &= (c - 1)(c - 16) \end{aligned}$$

である。 $D = 0$ のとき,

$$c = 1, 16$$

であるが,

$$(c, a) = (1, 3), (16, 48)$$

となるから, $0 < a < 10$ より $c = 1$ である。したがって,

$$(a, b, c) = (3, -4, 1)$$

であるから,

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

である。