

〔 I 〕

〔解答〕

	(1)	(2)	(3)	(4)
最大	C	C	C	B
最小	A	B	A	A

〔解説〕

(1)

$$2^{60} = 2^{3 \times 20} = 8^{20}$$

$$3^{40} = 3^{2 \times 20} = 9^{20}$$

であるから、

$$10^{20} > 9^{20} > 8^{20} \Leftrightarrow 10^{20} > 3^{40} > 2^{60}$$

となる。

(2)

自然数 n の正の約数の個数を $d(n)$ と書く。

$$d(144) = d(2^4 \cdot 3^2) = (4+1) \cdot (2+1) = 15$$

$$d(200) = d(2^3 \cdot 5^2) = (3+1) \cdot (2+1) = 12$$

$$d(216) = d(2^3 \cdot 3^3) = (3+1) \cdot (3+1) = 16$$

であるから、

$$d(216) > d(144) > d(200)$$

である。

(3)

円 $x^2 + y^2 = 1$ を x 軸方向に 3.3、 y 軸方向に -2.2 平行移動した図形は、

$$(x-3.3)^2 + (y+2.2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6.6x + 4.4y + 14.73 = 0$$

であるから、

$$c > b > a$$

である。

(4)

$b-c < 0$ であると仮定すると、

$$a - |b-c| < b-c$$

$$\Leftrightarrow a - (c-b) < b-c$$

$$\Leftrightarrow a < 0$$

となるが、これは a が 0 より大きい実数であることに反する。また、 b, c は異なるから

$b-c \neq 0$ である。よって、

$$b-c > 0$$

とわかる。同様にして、

$$c-a > 0$$

であるから、

$$\begin{cases} b-c > 0 \\ c-a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b > c > a$$

である。

【Ⅱ】

【解答】

(1)	ア	イ			
	9	4			
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ
	4	1	4	1	1
(3)	ク	ケ	コ	サ	
	2	4	5	2	
(4)	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
	A	D	A	B	B

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}t &= \sqrt{x} \text{ とおくと,} \\ 2x + \sqrt{x} - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2t^2 + t - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2t - 3)(t + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -2, \frac{3}{2}\end{aligned}$$

であるが、 $t \geq 0$ であるから、 $t = \frac{3}{2}$ である。よって、

$$x = t^2 = \frac{9}{4}$$

である。

(2)

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 4$$

であり、

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 4\vec{c} \qquad \cdots \cdots \text{①}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 &= |4\vec{c}|^2 \\ \Leftrightarrow 4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 &= 16|\vec{c}|^2 \\ \Leftrightarrow 12\vec{a} \cdot \vec{b} &= (16 - 4 - 9) \cdot 4^2 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= 4 \end{aligned}$$

である。また、

$$\text{①} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\vec{b} - 4\vec{c} = -2\vec{a} \\ 4\vec{c} - 2\vec{a} = 3\vec{b} \end{cases}$$

より、 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ 、 $\vec{c} \cdot \vec{a}$ についても同様に、

$$\begin{aligned} |3\vec{b} - 4\vec{c}|^2 &= |-2\vec{a}|^2 \\ \Leftrightarrow 9|\vec{b}|^2 - 24\vec{b} \cdot \vec{c} + 16|\vec{c}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 \\ \Leftrightarrow 24\vec{b} \cdot \vec{c} &= (9 + 16 - 4) \cdot 4^2 \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} &= 14 \\ |4\vec{c} - 2\vec{a}|^2 &= |3\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 16|\vec{c}|^2 - 16\vec{c} \cdot \vec{a} + 4|\vec{a}|^2 &= 9|\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 16\vec{c} \cdot \vec{a} &= (16 + 4 - 9) \cdot 4^2 \\ \Leftrightarrow \vec{c} \cdot \vec{a} &= 11 \end{aligned}$$

と求めることができる。

(3)

$$\begin{aligned} \log_2(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ) &= \log_2 \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 15^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 15^\circ \right) \\ &= \log_2 \sqrt{2} (\cos 45^\circ \cos 15^\circ - \sin 45^\circ \sin 15^\circ) \\ &= \log_2 \sqrt{2} \cos(45^\circ + 15^\circ) \\ &= \log_2 \left(\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \log_2 2^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(4)

(i)

$\alpha = -2$ 、 $\beta = -1$ 、 $a = 1$ 、 $b = 0$ 、 $c = 0$ のとき、 $b^2 \geq 4ac$ であるが

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

は $\alpha < x < \beta$ に解を持たない。一方2次方程式 $f(x) = 0$ が $\alpha < x < \beta$ に解を持つとき、 $f(x) = 0$

は実数解を持つから、判別式 D について、

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow b^2 - 4ac &\geq 0 \\ \Leftrightarrow b^2 &\geq 4ac \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、(i)は必要条件である。

(ii)

$\alpha = -0.5$ 、 $\beta = 0.5$ 、 $a = 1$ 、 $b = 0$ 、 $c = -1$ のとき、 $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$ であるが、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \pm 1 \end{aligned}$$

は $\alpha < x < \beta$ に解を持たない。一方 $\alpha = -0.5$ 、 $\beta = 0.5$ 、 $a = 1$ 、 $b = -2$ 、 $c = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 2 \end{aligned}$$

は $\alpha < x < \beta$ に解を持つが、 $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$ ではない。よって、(ii)は必要条件でも十分条件でもな

い。

(iii)

$\alpha = -0.5$ 、 $\beta = 0.5$ 、 $a = 1$ 、 $b = 0$ 、 $c = 1$ のとき、 $\{f(\alpha)\}^2 + \{f(\beta)\}^2 > 0$ であるが、 $f(x) = 0$ は実数解

を持たない。一方 $f(x) = 0$ が $\alpha < x < \beta$ に解 γ を持つが $\{f(\alpha)\}^2 + \{f(\beta)\}^2 \leq 0$ であると仮定す

ると、

$$\{f(\alpha)\}^2 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \{f(\beta)\}^2 \geq 0$$

であるから

$$\{f(\alpha)\}^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad \{f(\beta)\}^2 = 0$$

である。よって、

$$f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$$

となり、2次方程式が異なる3解を持つこととなり矛盾する。したがって、背理法により、

$$\{f(\alpha)\}^2 + \{f(\beta)\}^2 > 0$$

が成り立つことが示されたので、(iii)は必要条件であることがわかる。

(iv)

$f(\alpha)f(\beta) < 0$ のとき $f(\alpha)$ 、 $f(\beta)$ は異符号であるから、 $f(x) = 0$ となる x が $\alpha < x < \beta$ に存

在する。一方 $\alpha = -1$ 、 $\beta = 1$ 、 $a = 1$ 、 $b = 0$ 、 $c = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

は $\alpha < x < \beta$ に解を持つが、 $f(\alpha)f(\beta) > 0$ である。よって、(iv)は十分条件である。

(v)

$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0$ のとき、 $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ は $f(x) = 0$ の解であり、 $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$ である。一方、

$\alpha = -1$ 、 $\beta = 2$ 、 $a = 1$ 、 $b = 0$ 、 $c = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

は $\alpha < x < \beta$ に解を持つが、

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2}$$

より、

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) > 0$$

である。よって、(v)は十分条件である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

$$(1) \quad f_2(x) = 2x + 2, \quad f_3(x) = 3x + 4$$

$$(2) \quad a_n = n$$

$$(3) \quad b_n = 2^{n-1}$$

$$(4) \quad f_n(x) = nx + 2^{n-1}$$

(5)

放物線 $y = 4 - x^2$ と直線 $y = f_n(x)$ が接するのは、 x についての 2 次方程式

$$4 - x^2 = nx + 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + nx + 2^{n-1} - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が重解を持つときである。この 2 次方程式の判別式を D_n とすると

$$D_n = n^2 - 4 \cdot (2^{n-1} - 4)$$

$$= n^2 - 2^{n+1} + 16$$

である。ここで、 $g(n) = n^2 - 2^{n+1} + 16$ とおくと、

$$g(n+1) - g(n) = 2n + 1 - 2^{n+1}$$

であり、 $n \geq 1$ のとき、

$$g(n+1) - g(n) = 2n + 1 - 2 \cdot (1+1)^n$$

$$= 2n + 1 - 2 \cdot \sum_{k=0}^n {}_nC_k$$

$$\leq 2n + 1 - 2({}_nC_0 + {}_nC_1)$$

$$= 2n + 1 - 2(1 + n)$$

$$< 0$$

となるから、 $g(n)$ は単調減少である。したがって、 $n \geq 1$ において、 $g(n) = 0$ となる n は高々 1 個しか存在せず、

$$g(4) = 4^2 - 2^5 + 16 = 0$$

であるから、題意を満たす n は 4 である。このとき、

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

であり、

$$f_4(-2) = 0$$

であるから、接点の座標は $(-2, 0)$ である。

(答) $n = 4$

接点 $(-2, 0)$

〔解説〕

(1)

$$\int_0^x f_n(t) dt = \left[\frac{a_n}{2} t^2 + b_n t \right]_0^x = \frac{a_n}{2} x^2 + b_n x$$

であるから、

$$xf_{n+1}(x) = x^2 + 2 \left(\frac{a_n}{2} x^2 + b_n x \right)$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(x) = (a_n + 1)x + 2b_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。したがって、

$$f_2(x) = (a_1 + 1)x + 2b_1 = (1 + 1)x + 2 \cdot 1 = 2x + 2$$

$$f_3(x) = (a_2 + 1)x + 2b_2 = (2 + 1)x + 2 \cdot 2 = 3x + 4$$

である。

(2)

①より、

$$a_{n+1} = a_n + 1$$

であるから、

$$a_n = a_1 + (n - 1)$$

$$= n$$

である。

(3)

①より、

$$b_{n+1} = 2b_n$$

であるから、

$$b_n = 2^{n-1} \cdot b_1$$

$$= 2^{n-1}$$

である。

(4)

(2), (3)より、

$$f_n(x) = a_n x + b_n$$

$$= nx + 2^{n-1}$$

である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

$$(1) \quad \angle ADC = 60^\circ$$

$$(2) \quad \cos \theta = \frac{CD + DB}{2\ell}$$

(3)

$\cos \theta$ の値を①に代入すると、

$$\begin{aligned} AD^2 &= \ell^2 + CD^2 - 2\ell CD \cdot \frac{CD + DB}{2\ell} \\ &\Leftrightarrow AD^2 = \ell^2 - CD \cdot DB \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が得られる。また、 $\triangle ACD$ について、余弦定理より、

$$\begin{aligned} \ell^2 &= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos 60^\circ \\ &= AD^2 + CD^2 - AD \cdot CD \end{aligned}$$

が成り立つから、③に代入して、

$$\begin{aligned} AD^2 &= AD^2 + CD^2 - AD \cdot CD - CD \cdot DB \\ &\Leftrightarrow CD^2 = CD \cdot (AD + DB) \\ &\Leftrightarrow AD + DB = CD \end{aligned}$$

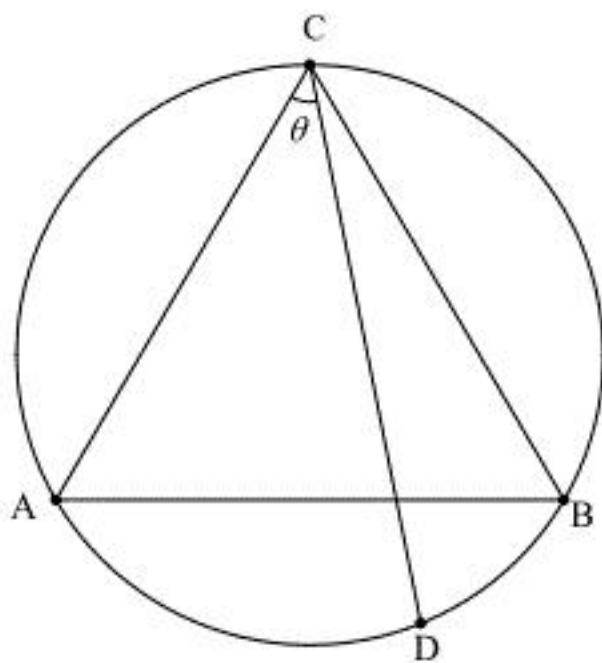
となる。

(証明終)

$$(4) \quad \frac{2\sqrt{3}}{3}\ell$$

〔解説〕

(1)



円周角の定理より、

$$\begin{aligned} \angle ADC &= \angle ABC \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

である。

(2)

$\triangle ACD$ について、余弦定理より、

$$AD^2 = \ell^2 + CD^2 - 2\ell CD \cos \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、円周角の定理より

$$\angle ABD = \theta$$

であるから、 $\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると、

$$AD^2 = \ell^2 + DB^2 - 2\ell DB \cos \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

である。①、②より、

$$\begin{aligned} \ell^2 + CD^2 - 2\ell CD \cos \theta &= \ell^2 + DB^2 - 2\ell DB \cos \theta \\ &\Leftrightarrow (CD - DB)(CD + DB) = 2\ell (CD - DB) \cos \theta \end{aligned}$$

である。 $\ell \neq 0$, $CD \neq DB$ より得られた式を辺々 $\ell(CD - DB)$ で割れば、

$$\begin{aligned} (CD + DB) &= 2\ell \cos \theta \\ &\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{CD + DB}{2\ell} \end{aligned}$$

となる。

(4)

外接円の半径を R とおく。 CD は円の直径となるときの最大で、このとき

$$CD = 2R$$

となる。 正弦定理より、

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{\ell}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\ell \end{aligned}$$

であるから、 CD の最大値は $\frac{2\sqrt{3}}{3}\ell$ である。(3)より、 $AD + DB$ の最大値は $\frac{2\sqrt{3}}{3}\ell$ となる。

〔V〕

(1)

スタート地点からゴール地点まで移動するには、東、北へ各々5回ずつ、計10回の移動を要する。よって、その道筋は、

$${}_{10}C_5 = 252 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 252 通り

(2)

スタート地点からスポットAまで移動するには、東、北へ各々3回ずつ、計6回の移動を要する。よって、その道筋は、

$${}_6C_3 = 20 \text{ (通り)}$$

である。スポットAからゴール地点まで移動するには、東、北へ各々2回ずつ、計4回の移動を要する。よって、その道筋は、

$${}_4C_2 = 6 \text{ (通り)}$$

である。よって、スポットAを経由してスタート地点からゴール地点まで移動する道筋は、

$$20 \times 6 = 120 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 120 通り

(3)

(1), (2)より

$$252 - 120 = 132 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 132 通り

(4)

スポットAを通り、スタート地点からゴール地点まで移動する道筋の数を $n(A)$ 、スポットAとスポットBの両方を通り、スタート地点からゴール地点まで移動する道筋の数を $n(A \cap B)$ と表すことにする。スタート地点からスポットBまで移動するには、東、北へ各々4回ずつ、計8回の移動を要する。よって、その道筋は、

$${}_8C_4 = 70 \text{ (通り)}$$

である。スポットBからゴール地点まで移動するには、東、北へ各々1回ずつ、計2回の移動を要する。よって、その道筋は、

$${}_2C_1 = 2 \text{ (通り)}$$

である。よって、

$$n(B) = 70 \times 2 = 140$$

である。スポットAからスポットBまで移動するには、東、北へ各々1回ずつ、計2回の移動を要する。よって、その道筋は、

$${}_2C_1 = 2 \text{ (通り)}$$

である。よって、

$$n(A \cap B) = 20 \times 2 \times 2 = 80$$

である。(2)より

$$n(A) = 120$$

であるから、求める道筋の数は、

$$\begin{aligned} n(\overline{A} \cap \overline{B}) &= 252 - n(A) - n(B) + n(A \cap B) \\ &= 252 - 120 - 140 + 80 \\ &= 72 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

である。

(答) 72 通り

(5)

$$n(B \cap C) = {}_2C_1 \times {}_6C_3 \times {}_2C_1 = 80$$

であるから、求める道筋の数は、

$$\begin{aligned} n(B \cap \overline{C}) &= n(B) - n(B \cap C) \\ &= 140 - 80 \\ &= 60 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

である。

(答) 60 通り