

〔Ⅰ〕

〔解答〕

あ

$$1 + \log 2 - \log(e+1)$$

い

$$-2$$

う

$$-e^2$$

え

$$0 < k < \frac{5}{e}$$

〔解説〕

(1)

$e^x = t$ とすると,

$$e^x dx = dt \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

であり,

x	0	$\rightarrow$	1
t	1	$\rightarrow$	e

となるから,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} &= \int_1^e \frac{dt}{(t+1)t} \\ &= \int_1^e \left\{ \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right\} dt \\ &= [\log|t| - \log|t+1|]_1^e \\ &= 1 + \log 2 - \log(e+1) \end{aligned}$$

と求めることができる。

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+3)e^{-x} + (x^2+3x+1) \cdot (-e^{-x}) \\ &= (-x^2-x+2)e^{-x} \\ &= -(x-1)(x+2)e^{-x} \end{aligned}$$

であり, 増減表は以下のようになる。

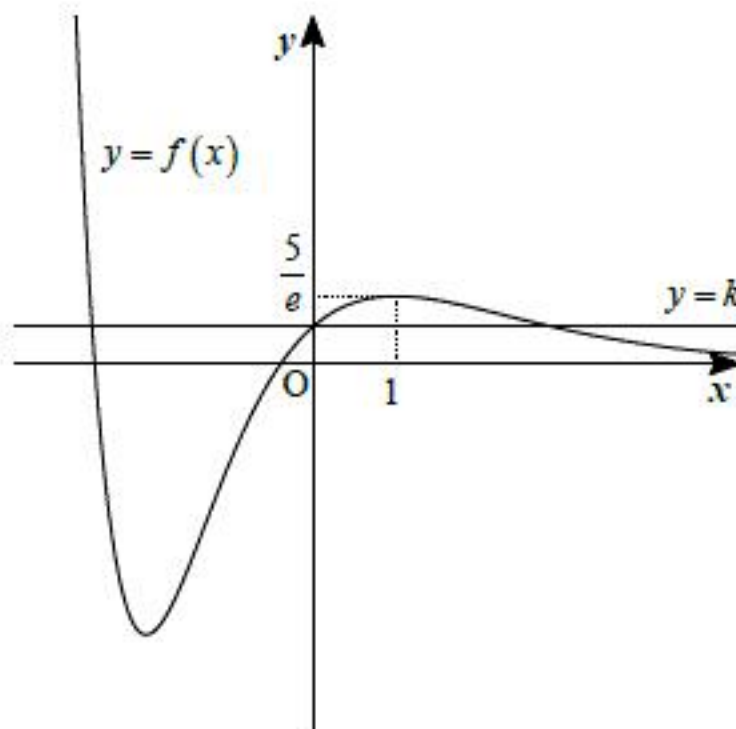
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	$\frac{5}{e}$	$\searrow$

ここで,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{e^x} = \infty$$

であるから, $f(x)$ は $x = -2$ において最小値 $-e^2$ をとる。また, $f(x) = k$ が異なる 3 つの実数解をもつためには, $y = f(x)$ と $y = k$ が異なる 3 点で交わればよい。



したがって, 求める k の範囲は,

$$0 < k < \frac{5}{e}$$

である。

【Ⅱ】

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
6	8	5	4	0	1	8

〔解説〕

(1)

z は α を中心とする半径 r の円周上にあるから、

$$|z-\alpha|=r$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} (z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha}) &= r^2 \\ \Leftrightarrow z\bar{z}-\bar{\alpha}z-\alpha\bar{z}+|\alpha|^2-r^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1-\frac{\bar{\alpha}}{\bar{z}}-\frac{\alpha}{z}+\frac{|\alpha|^2-r^2}{z\bar{z}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{z\bar{z}}-\frac{1}{|\alpha|^2-r^2}\frac{\alpha}{z}-\frac{1}{|\alpha|^2-r^2}\frac{\bar{\alpha}}{\bar{z}}+\frac{1}{|\alpha|^2-r^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z}-\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2-r^2}\right)\left(\frac{1}{\bar{z}}-\frac{\alpha}{|\alpha|^2-r^2}\right) &= \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|^2-r^2)^2}-\frac{1}{|\alpha|^2-r^2} \\ \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\bar{z}}-\frac{\alpha}{|\alpha|^2-r^2}\right|^2 &= \frac{r^2}{(|\alpha|^2-r^2)^2} \\ \therefore \left|\frac{1}{\bar{z}}-\frac{\alpha}{|\alpha|^2-r^2}\right| &= \frac{r}{||\alpha|^2-r^2|} \end{aligned}$$

より、点 $\frac{1}{\bar{z}}$ は、点 $\frac{\alpha}{|\alpha|^2-r^2}$ を中心とする半径 $\frac{r}{||\alpha|^2-r^2|}$ の円周上を動くことがわかる。

(2)

$$xyz=-2^4\times 3\times 5$$

である。 $xyz=-240$ を満たす x, y, z の組は、以下の2つに場合分けして考えることができる。

[1] x, y, z のうち2つが正、1つが負のとき

負の数、3を因数にもつ数、5を因数にもつ数の組み合わせを考えると、

$$3\times 3\times 3=27(\text{通り})$$

ある。それぞれに対し、4つの因数2の x, y, z への振り分け方は ${}_6\text{C}_2$ 通りあるから、全部

で、

$$27\times {}_6\text{C}_2(\text{通り})$$

である。

[2] x, y, z のすべてが負のとき

3を因数にもつ数、5を因数にもつ数の組み合わせを考えると、

$$3\times 3=9(\text{通り})$$

ある。それぞれに対し、[1]と同様 ${}_6\text{C}_2$ 通りの組が存在するから、

$$9\times {}_6\text{C}_2(\text{通り})$$

である。

以上[1], [2]より、

$$(27+9)\times {}_6\text{C}_2=540(\text{通り})$$

となる。また、

$$xyz=-240 \quad \text{かつ} \quad x+y+z=0$$

のとき、 z を消去して、

$$xy(-x-y)=-240$$

$$\Leftrightarrow xy(x+y)=240$$

が成り立つ。ここで $x+y+z=0$ となるのは上の[1]の場合であり、まずは、

$$y\geq x>0, z<0$$

のときを考える。

$$xy(x+y)\geq x\cdot x(x+x)=2x^3$$

より、

$$2x^3\leq 240\Leftrightarrow x^3\leq 120$$

であり、

$$4^3=64<120<125=5^3$$

であるから、

$$x\leq 4$$

とわかる。

[1] $x=1$ のとき

$$y(y+1)=240$$

$$\Leftrightarrow y^2+y-240=0$$

$$\Leftrightarrow (y+16)(y-15)=0$$

$$\therefore y=15 \quad (y\geq 1)$$

と求まり、このとき、

$$(x, y, z)=(1, 15, -16)$$

である。

[2] $x=2$ のとき

$$y(y+2)=120$$

$$\Leftrightarrow y^2+2y-120=0$$

$$\Leftrightarrow (y+12)(y-10)=0$$

$$\therefore y=10 \quad (\because y\geq 2)$$

と求まり、このとき、

$$(x, y, z)=(2, 10, -12)$$

である。

[3] $x=3$ のとき

$$y(y+3)=80$$

$$\Leftrightarrow y^2+3y-80=0$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{-3\pm\sqrt{329}}{2}$$

であり、 y は整数であるから不適である。

[4] $x=4$ のとき

$$y(y+4)=60$$

$$\Leftrightarrow y^2+4y-60=0$$

$$\Leftrightarrow (y+10)(y-6)=0$$

$$\therefore y=6 \quad (\because y\geq 4)$$

と求まり、このとき、

$$(x, y, z)=(4, 6, -10)$$

である。

以上で求めたそれぞれの組に対し、 x, y, z を入れ替えた組も条件を満たすので、全部で、

$$3\times 3!=18(\text{通り})$$

となる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

か

$$\frac{9}{28}$$

き

$$\frac{20}{63}$$

〔解説〕

(1)

すべての玉を区別して考えると、3個の玉の取り出し方は、

$${}_9C_3 \text{通り}$$

であり、これらは同様に確からしい。白玉、赤玉、青玉をそれぞれ1個ずつ取り出すのは、

$$3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{27}{{}_9C_3} = \frac{9}{28}$$

である。

(2)

A: 白玉3個、赤玉3個、青玉3個の袋を選ぶ事象

B: 白玉4個、赤玉4個、青玉1個の袋を選ぶ事象

C: 白玉5個、赤玉2個、青玉2個の袋を選ぶ事象

X: 取り出した玉が白玉、赤玉、青玉それぞれ1個ずつである事象

とすると、求める確率は、

$$P_X(C) = \frac{P(X \cap C)}{P(X)} = \frac{P(C \cap X)}{P(A \cap X) + P(B \cap X) + P(C \cap X)}$$

と表せる。(1)より、

$$P(A \cap X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{{}_9C_3}$$

であり、B, Cについても同様に、

$$P(B \cap X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \times 4 \times 1}{{}_9C_3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{{}_9C_3}$$

$$P(C \cap X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \times 2 \times 2}{{}_9C_3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{{}_9C_3}$$

となる。したがって、

$$P_X(C) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{20}{{}_9C_3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{27 + 16 + 20}{{}_9C_3}} = \frac{20}{63}$$

と求めることができる。

〔Ⅳ〕

(1)

$$a(2017) = a(a(2218)) \quad (\because (\text{ii}) \text{ を利用})$$

$$= a(2018) \quad (\because (\text{iii}) \text{ を利用})$$

$$= 1818 \quad (\because (\text{iii}) \text{ を利用})$$

である。

(答) $a(2017) = 1818$

(2)

1817 以上かつ 2017 以下の自然数 n は整数 k を用いて、

$$n = 2017 - k \quad (0 \leq k \leq 200)$$

と表せ、

$$a(2017 - k) = a(a(2218 - k)) \quad (\because 2017 - k \leq 2017 \text{ より } (\text{ii}) \text{ を利用})$$

$$= a(2018 - k) \quad (\because 2218 - k \geq 2018 \text{ より } (\text{iii}) \text{ を利用})$$

が成り立つ。すると、

$$a(2017) = a(2016) = a(2015) = \cdots = a(1817)$$

となるので、題意は示された。

(証明終)

(3)

i, j を

$$202 \leq i \leq j \leq 2017$$

を満たす自然数とすると、 $i \leq n \leq j$ である n について $a(n) = a(2017)$ ならば、

$$a(n - 201) = a(a(n)) = a(a(2017)) = a(1818) = a(2017)$$

となることがわかる。ここで(2)より、 $1817 \leq n \leq 2017$ のとき

$$a(n) = a(2017)$$

であるから、 $1616 \leq n \leq 1816$ である n についても

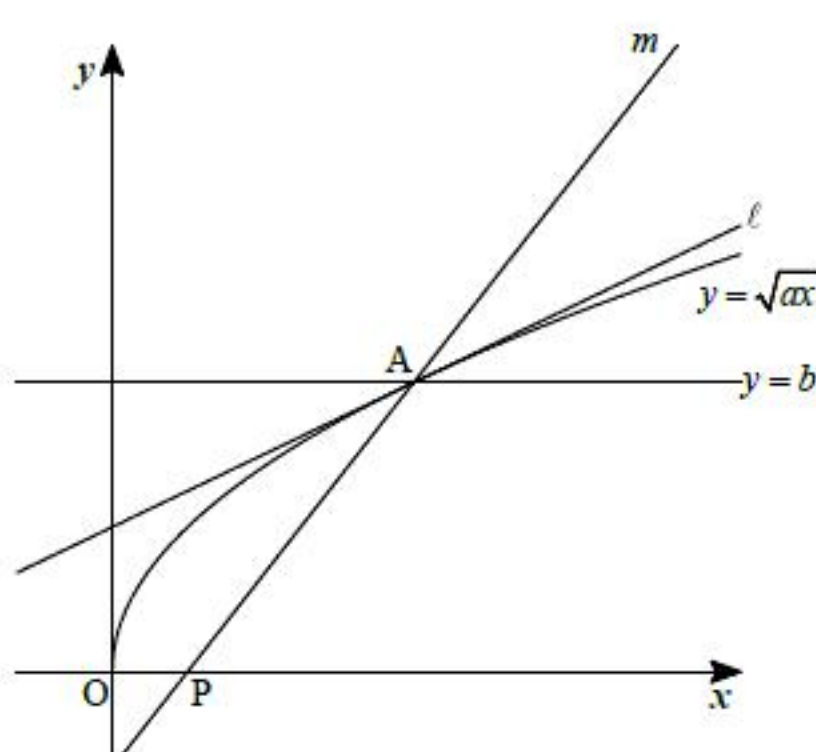
$$a(n) = a(2017)$$

が成り立つ。同様に考えていけば 1816 以下の自然数 n について $a(n) = a(2017)$ が成り立つことが分かる。

(証明終)

〔V〕

(1)



曲線 $y = \sqrt{ax}$ と直線 $y = b$ の交点は、

$$\begin{aligned}\sqrt{ax} &= b \\ \therefore x &= \frac{b^2}{a}\end{aligned}$$

より、 $A\left(\frac{b^2}{a}, b\right)$ である。また、

$$y = \sqrt{ax}$$

について、

$$y' = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}$$

であるから、 ℓ の傾きは、

$$\frac{\sqrt{a}}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{b^2}} = \frac{a}{2b} \quad (\because b > 0)$$

である。したがって ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned}y - b &= \frac{a}{2b} \left(x - \frac{b^2}{a} \right) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{a}{2b} x + \frac{b}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

[1] $\frac{a}{2b} \neq 1$ のとき

ℓ と k のなす角を θ とすると、 m と k のなす角は 2θ であるから、 m の傾きは、

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \cdot \frac{a}{2b}}{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2} = \frac{4ab}{4b^2 - a^2}$$

である。よって m の方程式は、

$$\begin{aligned}y - b &= \frac{4ab}{4b^2 - a^2} \left(x - \frac{b^2}{a} \right) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{4ab}{4b^2 - a^2} x - \frac{a^2 b}{4b^2 - a^2}\end{aligned}$$

である。また P の x 座標は、

$$\begin{aligned}0 &= \frac{4ab}{4b^2 - a^2} x - \frac{a^2 b}{4b^2 - a^2} \\ \therefore x &= \frac{a}{4}\end{aligned}$$

となる。

[2] $\frac{a}{2b} = 1$ のとき

m は A を通り y 軸に平行な直線であり、

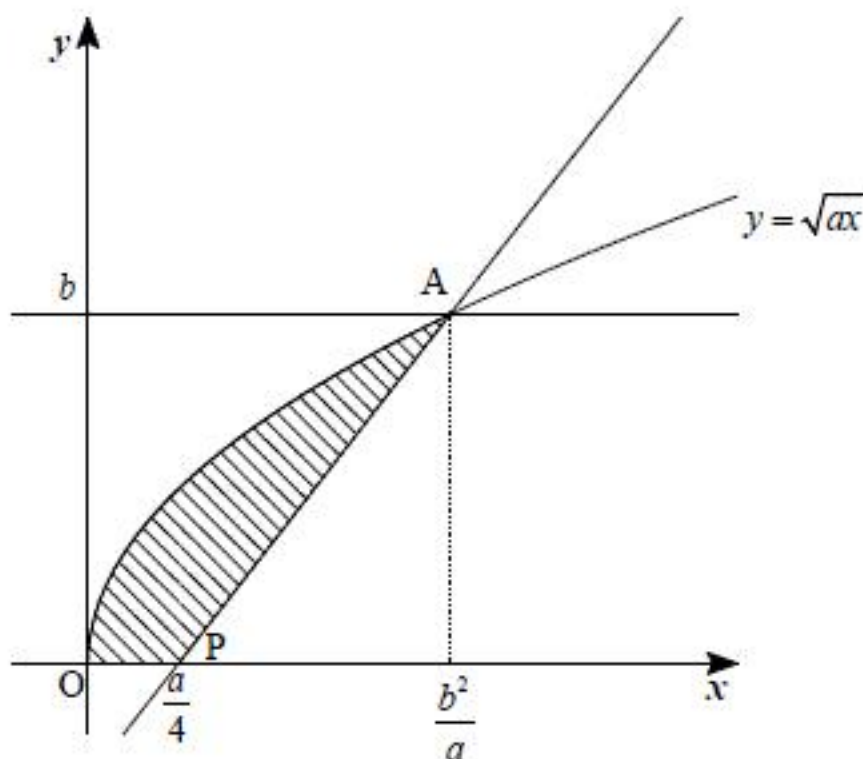
$$x = \frac{b^2}{a} = \frac{a}{4}$$

となる。

$$\ell: y = \frac{a}{2b}x + \frac{b}{2}$$

$$\begin{aligned}(\text{答}) \quad m: &\begin{cases} y = \frac{4ab}{4b^2 - a^2}x - \frac{a^2 b}{4b^2 - a^2} & (a \neq 2b \text{ のとき}) \\ x = \frac{a}{4} & (a = 2b \text{ のとき}) \end{cases} \\ &P\left(\frac{a}{4}, 0\right)\end{aligned}$$

(2)



求める面積は、 $a \neq 2b, a = 2b$ いずれの場合も、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{b^2}{a}} \sqrt{ax} dx - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b^2}{a} - \frac{a}{4} \right) \cdot b &= \left[\frac{2\sqrt{a}}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{b^2}{a}} - \frac{b}{2} \left(\frac{b^2}{a} - \frac{a}{4} \right) \\ &= \frac{2b^3}{3a} - \frac{b}{2} \left(\frac{b^2}{a} - \frac{a}{4} \right) \\ &= \frac{b^3}{6a} + \frac{ab}{8}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{b^3}{6a} + \frac{ab}{8}$$

(3)

$$S(b) = \frac{b^3}{18} + \frac{3b}{8}, T(b) = \frac{b^3}{12} + \frac{2b}{8}$$

であるから、

$$G(b) = -\frac{b^3}{36} + \frac{b}{8}$$

である。

$$G'(b) = -\frac{b^2}{12} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{12} \left(b - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \left(b + \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

より、増減表は以下ようになる。

b	0	...	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	...
$G'(b)$		+	0	-
$G(b)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{24}$	$\searrow$

したがって $G(b)$ は $b = \frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{6}}{24}$ をとることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } \frac{\sqrt{6}}{24} \quad b = \frac{\sqrt{6}}{2}$$