

【Ⅰ】

【解答】

(1)	①	ア	
		B	
	②	イ	ウ
		B	I
(2)	ア	イ	
		B	C
(3)	①	ア	イ
		B	C
	②	ウ	エ
		B	J
(4)	①	ア	イ
		C	B
	②	ウ	エ
		B	C
(5)	①	ア	
		C	
	②	イ	ウ
		G	B
(6)	ア	イ	
	D	C	

【解説】

(1)①

与式は

$$x^3-(1-2a)x^2+(68-2a)x-68=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2ax+68)=0$$

と変形できるから、 a の値によらず、 $x=1$ を解にもつ。

②

2次方程式 $x^2+2ax+68=0$ の判別式を D とおくと、 $x^2+2ax+68=0$ が実数解を持つ条件は、

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2-68 \geq 0$$

であり、その解は、

$$x=-a \pm \sqrt{a^2-68}$$

である。すなわち、 $x^2+2ax+68=0$ の解がすべて整数となる条件は、 $k \geq 0$ を満たす整数 k を用いて、

$$a^2-68=k^2$$

$$\Leftrightarrow (a+k)(a-k)=2^2 \cdot 17$$

と書けることである。 $a>0, k \geq 0$ より、

$$a>k, a+k \geq a-k$$

であり、 $a+k$ と $a-k$ の偶奇は一致するから、この式を満たす (a, k) の組み合わせは、

$$(a+k, a-k)=(34, 2)$$

$$\therefore (a, k)=(18, 16)$$

である。以上より、与式の解がすべて整数となるときの、 $a=18$ である。

(2)

与式を整理すると、

$$(1+i)x^2+(4k+i)x+1+4ki=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+4kx+1+i(x^2+x+4k)=0$$

となる。右辺が0であるから、 x が実数のとき、

$$\begin{cases} x^2+4kx+1=0 & \cdots \textcircled{1} \\ x^2+x+4k=0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

であり、①と②が共通の実数解をもつときの k の値を求めればよい。①と②の共通解を α とすると、

$$\begin{cases} \alpha^2+4k\alpha+1=0 \\ \alpha^2+\alpha+4k=0 \end{cases}$$

が得られ、これより、

$$(4k\alpha+1)-(\alpha+4k)=0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-1)(4k-1)=0$$

が成り立つ。以下、 $\alpha=1$ または $k=\frac{1}{4}$ で場合分けを行う。

[1] $k=\frac{1}{4}$ のとき

①、②に $k=\frac{1}{4}$ を代入すると、両方とも、

$$x^2+x+1=0$$

となり、この解は、

$$x=-1 \pm \sqrt{3}i$$

である。したがって、実数解ではないから不適である。

[2] $\alpha=1$ のとき

①、②に解を代入すると、両方とも、

$$1+4k+1=0$$

$$\therefore k=-\frac{1}{2}$$

となるから、これは題意を満たす。

以上[1],[2]より題意を満たす k は、 $k=-\frac{1}{2}$ である。

(3)

進路を横、奥、下の3方向で定義する。AからBまでの最短経路は横に3回、奥に1回移動する経路であり、BからCまでの最短経路は奥に1回、下に2回移動する経路とする。

①

AからBまでの最短経路は横に3回、奥に1回移動する経路であるから、その順番は、

$$\frac{4!}{3!1!}=4 \text{ (通り)}$$

である。また、BからCまでの最短経路は奥に1回、下に2回移動する経路であるから、その順番は、

$$\frac{3!}{1!2!}=3 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める経路の数は、

$$4 \cdot 3=12 \text{ (通り)}$$

である。

②

AからCまでの最短経路は横に3回、奥に2回、下に2回移動する経路であるから、その順番は、

$$\frac{7!}{3!2!2!}=210 \text{ (通り)}$$

である。よって、①より、AからCまでの最短経路のうちBを通らないものは、

$$210-12=198 \text{ (通り)}$$

である。

(4)①

すべての s と t について、 $\overrightarrow{OK}=(5st-2s-2t+1, 5st-3s-3t+2)$ が成り立つから、たとえば、

$$s=t=0 \text{ のとき、 } \overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OC}=(1, 2),$$

$$s=1, t=0 \text{ のとき、 } \overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}=(-1, -1),$$

$$s=1, t=1 \text{ のとき、 } \overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OB}=(2, 1)$$

が成り立つ。このとき、

$$\overrightarrow{OP}=(3t-1, 2t-1)$$

$$\overrightarrow{OQ}=(1-2t, 2-3t)$$

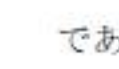
であるから、 $\overrightarrow{OK}=(5st-2s-2t+1, 5st-3s-3t+2)$ は確かに成り立つ。したがって、

$$\overrightarrow{OA}=(-1, -1), \overrightarrow{OB}=(2, 1), \overrightarrow{OC}=(1, 2)$$

である。

②

以下に3点A, B, Cを図示する。



△ABCの各辺の長さは、

$$AB=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+\{1-(-1)\}^2}=\sqrt{13}$$

$$AC=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{13}$$

$$BC=\sqrt{\{1-2\}^2+\{2-1\}^2}=\sqrt{2}$$

である。△ABCにおいて余弦定理より、

$$\cos \theta = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

$$= \frac{(\sqrt{13})^2+(\sqrt{13})^2-(\sqrt{2})^2}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{13}}$$

$$= \frac{12}{13}$$

である。

(5)①

5個の値の平均は $\frac{2+3+4+5+6}{5}=4$ である。よって、その分散は、

$$\frac{1}{5}\{(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2\}=2$$

である。

②

15個の値の平均は $\frac{4 \times 5 + 7 \times 10}{15}=6$ である。①で扱った5個のデータを $x_1, x_2, \dots, x_5$ として、残り10個のデータを $x_6, x_7, \dots, x_{15}$ とする。 $x_6, x_7, \dots, x_{15}$ の平均が7、分散が11より、

$$\frac{1}{10} \sum_{k=6}^{15} x_k^2 - 7^2 = 11 \Leftrightarrow \sum_{k=6}^{15} x_k^2 = 600$$

であり、 $\sum_{k=1}^5 x_k^2=90$ より $\sum_{k=1}^{15} x_k^2=690$ である。よって、15個の値の分散は、

$$\frac{1}{15} \sum_{k=1}^{15} x_k^2 - 6^2 = 46 - 36 = 10$$

である。

(6)

以下に放物線 $y=x^2$ と直線 $y=\frac{1}{2}ax$ および直線 $x=3$ で囲まれた部分の面積を斜線部で示す。



放物線 $y=x^2$ と直線 $y=\frac{1}{2}ax$ の交点の x 座標は、

$$x^2=\frac{1}{2}ax$$

$$\Leftrightarrow x\left(x-\frac{a}{2}\right)=0$$

$$\therefore x=0, \frac{a}{2}$$

である。 $0<\frac{a}{2}<3$ より、2つの斜線部の面積の和は、

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{1}{2}ax - x^2\right) dx + \int_{\frac{a}{2}}^3 \left(x^2 - \frac{1}{2}ax\right) dx = \left[\frac{a}{4}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{2}} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{4}x^2\right]_{\frac{a}{2}}^3$$

$$= \frac{a}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{a}{4} \cdot 3^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^3 + \frac{a}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a^3}{24} - \frac{9}{4}a + 9$$

となる。ここで、 $f(a)=\frac{a^3}{24}-\frac{9}{4}a+9$ とおくと、

$$f'(a)=\frac{a^2}{8}-\frac{9}{4}=\frac{1}{8}(a^2-18)$$

であり、 $f'(a)=0$ を満たす a は $0<a<6$ の範囲において $a=3\sqrt{2}$ である。以下に $f(a)$ の増減表を示す。

a	(0)	...	$3\sqrt{2}$	...	(6)
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$	(9)	↘	極小	↗	$\left(\frac{9}{2}\right)$

上表より、 $f(a)$ が最小値をとる、すなわち2つの斜線部の面積の和を最小とする定数 a の値は、 $a=3\sqrt{2}$ である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

$$(1) \quad b_{n+1} - b_n = \boxed{2n}$$

$$(2) \quad \text{数列} \{b_n\} \text{の一般項は} \boxed{n^2 - n + 16}$$

$$(3) \quad n = \boxed{8}$$

〔解説〕

(1)

式を変形すると、

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{n+1}{a_{n+1}} - \frac{n}{a_n} \\ &= \frac{n+1}{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{a_n}{1+2a_n}} - \frac{n}{a_n} \\ &= \frac{n}{a_n} (1+2a_n) - \frac{n}{a_n} \\ &= \frac{n}{a_n} \cdot 2a_n \\ &= 2n \end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)より、 $n \geq 2$ のとき、

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = \frac{1}{a_1} + 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n = n^2 - n + 16$$

である。 $n=1$ のとき、 $b_1=16$ よりこれは $n=1$ のときも成り立つ。

(3)

(2)より、 $a_n = \frac{n}{n^2 - n + 16}$ である。また、 $n^2 - n + 16 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{63}{4} > 0$ である。 $a_n \geq \frac{1}{9}$ となるよ

うな n の値の範囲は、

$$\frac{n}{n^2 - n + 16} \geq \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 10n + 16 \leq 0 \quad (\because n^2 - n + 16 > 0)$$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n-8) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq n \leq 8$$

であるから、 $a_n \geq \frac{1}{9}$ となるような最大の n の値は 8 である。

【Ⅲ】

【解答】

$$\begin{aligned} (1) \quad & \boxed{6-3\sqrt{2}} < x^2 < \boxed{8} \\ (2) \quad & \cos\alpha - \cos\gamma = \boxed{\frac{1}{4}} \\ (3) \quad & \cos\alpha = \boxed{\frac{1}{8}}, \text{ 最大値 } \boxed{\frac{63}{32}} \\ & \text{BD} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

【解説】

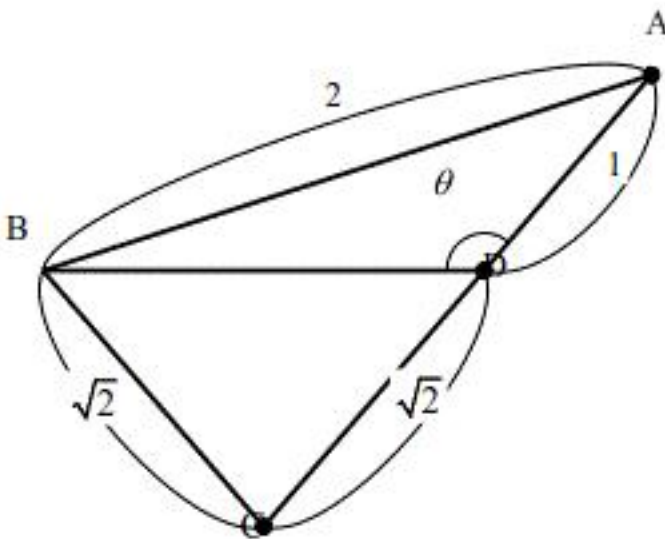
(1) 条件(i), (ii)をとともに満たす四角形 ABCD が存在するための条件は, $\triangle ABD$ と $\triangle BCD$ が存在し, かつ $0 < \angle CDA < \pi$ が成り立つことである。まず, $\triangle ABD$ が存在するための条件は,

$$\begin{aligned} 2+1 > x \text{ かつ } x+2 > 1 \text{ かつ } 1+x > 2 \\ \Leftrightarrow 1 < x < 3 \\ \Leftrightarrow 1 < x^2 < 9 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

であり, $\triangle BCD$ が存在するための条件は,

$$\begin{aligned} \sqrt{2}+\sqrt{2} > x \text{ かつ } x+\sqrt{2} > \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow 0 < x < 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow 0 < x^2 < 8 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。これらの条件の下, $0 < \angle CDA < \pi$ が成り立つための条件を求める。



上図のように 3 点 C, D, A が 1 直線上にあるときの BD の長さを a とすると, $x > a$ が成り立つ。また, $\angle CDA$ を 180° に近づけることで, x をどこまでも a に近づけることができる。よって, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の下での $0 < \angle CDA < \pi$ が成り立つための x^2 の条件は, $x^2 > a^2$ である。そこで, 以下 a^2 を求める。3 点 C, D, A が 1 直線上にあるとき, $\angle ADB = \theta$ とすると, $\triangle ABD$ において余弦定理より,

$$\begin{aligned} AB^2 &= DA^2 + DB^2 - 2 \cdot DA \cdot DB \cdot \cos \angle ADB \\ \Leftrightarrow 2^2 &= 1^2 + a^2 - 2 \cdot 1 \cdot a \cdot \cos \theta \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a \cos \theta - 3 &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。また, $\triangle BCD$ において余弦定理より,

$$\begin{aligned} BC^2 &= DB^2 + DC^2 - 2 \cdot DB \cdot DC \cdot \cos \angle BDC \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 &= a^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\pi - \theta) \\ \Leftrightarrow a^2 + 2\sqrt{2}a \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow a + 2\sqrt{2} \cos \theta &= 0 \quad (\because a > 0) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

である。 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より,

$$\begin{aligned} a^2 - 2 \cdot \left(-\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) \cdot a - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) a^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 6 - 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。よって, $0 < \angle CDA < \pi$ が成り立つための条件は, $6 - 3\sqrt{2} < x^2$ である。これと $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ と合わせて, x^2 のとりうる値の範囲は,

$$6 - 3\sqrt{2} < x^2 < 8$$

である。

(2) $\triangle ABD$ において余弦定理を用いると,

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \alpha \\ \Leftrightarrow BD^2 &= 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos \alpha \\ \Leftrightarrow BD^2 &= 5 - 4 \cos \alpha \end{aligned} \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。また, $\triangle BCD$ において余弦定理を用いると,

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos \gamma \\ \Leftrightarrow BD^2 &= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \gamma \\ \Leftrightarrow BD^2 &= 4 - 4 \cos \gamma \end{aligned} \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。 $\textcircled{5}, \textcircled{6}$ より,

$$\begin{aligned} 5 - 4 \cos \alpha &= 4 - 4 \cos \gamma \\ \Leftrightarrow \cos \alpha - \cos \gamma &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

(3) $S^2 + T^2$ は,

$$\begin{aligned} S^2 + T^2 &= \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin \alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \gamma\right)^2 \\ &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \gamma \\ &= 2 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma \end{aligned}$$

である。ここで, $\cos \alpha - \cos \gamma = \frac{1}{4}$ より,

$$\begin{aligned} S^2 + T^2 &= 2 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma \\ &= 2 - \cos^2 \alpha - \left(\cos \alpha - \frac{1}{4}\right)^2 \\ &= -2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{31}{16} \\ &= -2 \left(\cos \alpha - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{63}{32} \end{aligned}$$

となる。いま, $x (= BD) = 2\sqrt{2}$ のとき $\cos \alpha$ の値は, $\textcircled{5}$ より,

$$\begin{aligned} (2\sqrt{2})^2 &= 5 - 4 \cos \alpha \\ \therefore \cos \alpha &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

であり, $x = 6 - 3\sqrt{2}$ のとき $\cos \alpha$ の値は, $\textcircled{5}$ より,

$$\begin{aligned} (6 - 3\sqrt{2})^2 &= 5 - 4 \cos \alpha \\ \therefore \cos \alpha &= \frac{-49 + 36\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

である。よって, $y = -2 \left(t - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{63}{32}$ とすると, $-\frac{3}{4} < t < \frac{-49 + 36\sqrt{2}}{4}$ の範囲における y の最大値を求めればよい。 $-\frac{3}{4} < \frac{1}{8} < \frac{-49 + 36\sqrt{2}}{4}$ より, $S^2 + T^2$ は $t = \frac{1}{8}$, すなわち $\cos \alpha = \frac{1}{8}$ で最大値

$\frac{63}{32}$ をとる。このとき, $\textcircled{5}$ より,

$$\begin{aligned} BD^2 &= 5 - 4 \cdot \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow BD &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (\because BD > 0) \end{aligned}$$

となる。