

【I】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ
	9	0	0
(2)	エ	オ	カ
	1	6	5
(3)	キ	ク	ケ
	1	0	0
(4)	コ	サ	シ
	3	9	2
(5)	ス	セ	ソ
	6	2	5

〔解説〕

(1)

余事象を考える。 ab が 5 の倍数とならないことは、 a, b がいずれも 5 の倍数でないことと同値である。1 以上 50 以下の整数には 5 の倍数が 10 個あるから、このような a, b の組は

$$40 \cdot 40 = 1600$$

より、1600 通り存在する。以上より、題意を満たす a, b の組は、

$$50 \cdot 50 - 1600 = 900$$

であるから、900 通り存在する。

(2)

1 以上 50 以下の整数には、15 で割った余りが 1, 2, 3, 4, 5 になる整数はそれぞれ 4 個ずつ存在し、15 で割った余りが 0, 6, 7, ..., 13, 14 になる整数はそれぞれ 3 個ずつ存在する。 $a+b$ が 15 の倍数となることは、 a を 15 で割った余りと b を 15 で割った余りの和が 15 の倍数となることと同値である。ここで、 a, b の一方を 15 で割った余りが 1, 2, 3, 4, 5 である場合とそうでない場合に分けて考えると

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 3 = 165$$

であるから、題意を満たす a, b の組は、165 通り存在する。

(3)

1 以上 50 以下の整数は全てそれぞれ、 $0 \leq c \leq 4$ なる整数 c と $1 \leq d \leq 10$ なる整数 d を用いて $10c+d$ と一意に表すことが出来る。ここで、 $a=10c+d$ のとき、題意を満たすような b は、 $0 \leq e < c$ となる整数 e を用いて $b=10e+d$ と表される整数であり、これは c 個存在する。以上より、題意を満たす a, b の組は、

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^{10} \sum_{c=0}^4 c &= \sum_{d=1}^{10} \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \\ &= 10 \cdot 10 \\ &= 100 \end{aligned}$$

であるから、100 通り存在する。

(4)

1 以上 50 以下の整数は全てそれぞれ、整数 f と $1 \leq g \leq 3$ なる整数 g を用いて $3f+g$ と一意に表すことが出来る。ただし、 $g=1, 2$ のときは $0 \leq f \leq 16$ であり、 $g=3$ のときは $0 \leq f \leq 15$ である。ここで、

$$\begin{aligned} (3f+1)^3 &= 9(3f^3+3f^2+f)+1 \\ (3f+2)^3 &= 9(3f^3+6f^2+4f)+8 \\ (3f+3)^3 &= 9(3f^3+27f^2+27f+3) \end{aligned}$$

であることに注意すると、 $a=3f+g$ のとき、題意を満たすような b は、 $0 \leq h < f$ となる整数 h を用いて $b=3h+g$ と表される整数であり、これは f 個存在する。以上より、題意を満たす a, b の組は、

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{f=0}^{16} f + \sum_{f=0}^{15} f &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 17 + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 \\ &= 392 \end{aligned}$$

であるから、392 通り存在する。

(5)

$a, b > 0$ であることに注意すると、 $a \sin \theta = b \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{b}{a}$ が $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ の範囲で解を持つことは、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{b}{a} \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2b \leq a \end{aligned}$$

と同値である。1 以上 50 以下の整数は全てそれぞれ、 $0 \leq i \leq 24$ なる整数 i と $1 \leq j \leq 2$ なる整数 j を用いて $2i+j$ と一意に表すことが出来る。ここで、 $a=2i+j$ のとき、題意を満たすような b は、 $j=1$ のときは 1 以上 i 以下の整数であり、全部で i 個存在し、 $j=2$ のときは 1 以上 $i+1$ 以下の整数であり、全部で計 $i+1$ 個存在する。以上より、題意を満たす a, b の組は、

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{24} \{i+(i+1)\} &= \sum_{i=0}^{24} (2i+1) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 25 + 25 \\ &= 625 \end{aligned}$$

であるから、625 通り存在する。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	$\begin{array}{ c } \hline \times \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline \neq \\ \hline \end{array}$
	3	1

(2)

① $a_n = 1 + \frac{1}{3n-2}$

②

数学的帰納法を利用して、 $a_n = 1 + \frac{1}{3n-2}$ であることを示す。 $n=1$ では、

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \frac{1}{3 \cdot 1 - 2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

より成立する。 n での成立を仮定すると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{4a_n - 3}{3a_n - 2} \\ &= \frac{4 \cdot \left(1 + \frac{1}{3n-2}\right) - 3}{3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3n-2}\right) - 2} \\ &= \frac{3n-2+4}{3n-2+3} \\ &= 1 + \frac{1}{3(n+1)-2} \end{aligned}$$

より、 $n+1$ でも成立する。以上より、 $a_n = 1 + \frac{1}{3n-2}$ である。

(証明終)

〔解説〕

(1)

a_n は公差3初項2の等差数列であるから、

$$\begin{aligned} a_n &= 3(n-1) + 2 \\ &= 3n-1 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ &= 1 + \frac{1}{3 \cdot 1 - 2} \\ a_2 &= \frac{4 \cdot 2 - 3}{3 \cdot 2 - 2} \\ &= \frac{5}{4} \\ &= 1 + \frac{1}{3 \cdot 2 - 2} \\ a_3 &= \frac{4 \cdot \frac{5}{4} - 3}{3 \cdot \frac{5}{4} - 2} \\ &= \frac{8}{7} \\ &= 1 + \frac{1}{3 \cdot 3 - 2} \\ a_4 &= \frac{4 \cdot \frac{8}{7} - 3}{3 \cdot \frac{8}{7} - 2} \\ &= \frac{11}{10} \\ &= 1 + \frac{1}{3 \cdot 4 - 2} \end{aligned}$$

であることから、一般項は

$$a_n = 1 + \frac{1}{3n-2}$$

であると推測出来る。