

〔Ⅰ〕

〔解答〕

1	(1)	(2)
	B	V
2	(3)	(4)
	A	X
3	(5)	(6)
	B	H

〔解説〕

1.

PQ^2 が最小のとき、線分 PQ の長さも最小である。 $P(2t-1, t+2)$ 、 $Q(t^2+2t, t^2+t-1)$ より、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \{t^2+2t-(2t-1)\}^2 + \{t^2+t-1-(t+2)\}^2 \\ &= (t^2+1)^2 + (t^2-3)^2 \\ &= 2t^4-4t^2+10 \\ &= 2(t^2-1)^2+8 \end{aligned}$$

と表せるから、 PQ は

$$\begin{aligned} t^2 &= 1 \\ \therefore t &= 1 \quad (\because t \geq 0) \end{aligned}$$

のとき、最小値

$$PQ = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

をとる。

2.

$\vec{a} = (x-1, 2x+3)$ 、 $\vec{b} = (-2x-1, x+3)$ であるから、

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{(x-1)^2 + (2x+3)^2} = \sqrt{5x^2+10x+10} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{(-2x-1)^2 + (x+3)^2} = \sqrt{5x^2+10x+10} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x-1)(-2x-1) + (2x+3)(x+3) = 10x+10 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 、 $\vec{b} \neq \vec{0}$ であるから、

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

である。したがって、 $\cos \theta = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{2x+2}{x^2+2x+2} &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2+2x+2 &= 2x+2 \quad (\because x^2+2x+2 > 0) \\ \Leftrightarrow x^2 &= 0 \\ \therefore x &= 0 \end{aligned}$$

となり、 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{2x+2}{x^2+2x+2} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x^2+2x+2 &= 4x+4 \quad (\because x^2+2x+2 > 0) \\ \Leftrightarrow x^2-2x-2 &= 0 \\ \therefore x &= 1+\sqrt{3} \quad (\because x \geq 0) \end{aligned}$$

となる。

3.

$D \cup F = F$ であるから、

$$\begin{aligned} D \cup F &= F \\ \Leftrightarrow D \cap \overline{F} &= \emptyset \\ \Leftrightarrow (A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) &= \emptyset \\ \Leftrightarrow A \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) &= \emptyset \\ \Leftrightarrow A \cap B \cap \overline{C} &= \emptyset \end{aligned}$$

である。したがって、

$$n(A \cap B) = n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap \overline{C}) = n(A \cap B \cap C)$$

であるから、

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A \cap B \cap C)} = 1$$

である。また、 $D \cup F = F \Leftrightarrow A \cap B \cap \overline{C} = \emptyset$ と同様にして

$$\begin{aligned} E \cup D = D &\Leftrightarrow \overline{A} \cap B \cap C = \emptyset \\ F \cup E = E &\Leftrightarrow A \cap \overline{B} \cap C = \emptyset \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - 2 \cdot n(A \cap B \cap C)$$

であるから、

$$n(A \cap B \cap C) = \frac{n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cup B \cup C)}{2} = 7$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
3	2	1	2	2	3	3	2	3	2
サ	シ	ス	セ	ソ	タ				
3	0	2	3	1	3				

〔解説〕

2倍角の公式より、

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= \cos^2 \alpha + 2\sqrt{2} \cos \alpha \sin \alpha + 1 \\
 &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \sqrt{2} \sin 2\alpha + 1 \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \sqrt{2} \sin 2\alpha
 \end{aligned}$$

となる。このとき、 $r \cos \theta = 1, r \sin \theta = 2\sqrt{2}$ を満たすように $0 \leq r$ と $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ をとると

$$r^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = 1^2 + (2\sqrt{2})^2 = 9$$

$$\therefore r = 3 \quad (\because r \geq 0)$$

である。これより、 $\cos \theta = \frac{1}{3}, \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ であるから、三角関数の合成を行うことで、

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \sqrt{2} \sin 2\alpha \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \cos 2\alpha + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin 2\alpha \right) \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos(2\alpha - \theta)
 \end{aligned}$$

と表せる。いま、

$$0 \leq \alpha \leq 180^\circ \Leftrightarrow -\theta \leq 2\alpha - \theta \leq -\theta + 360^\circ \quad \cdots \textcircled{1}$$

であるから

$$-1 \leq \cos(2\alpha - \theta) \leq 1$$

より、 $f(\alpha)$ の最大値は3、最小値は0となる。また、 $f(\alpha)$ が最大値をとるとき、

$$\cos(2\alpha - \theta) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha - \theta = 0 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore \alpha = \frac{\theta}{2}$$

であるから

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \Leftrightarrow 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

となり、 $\cos \alpha \geq 0, \sin \alpha \geq 0$ である。よって、半角の公式を利用することで、

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \\
 \sin \alpha &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅲ〕

1. (1)

$$\begin{aligned} n^2 - \int_{n-1}^n x^2 dx &= n^2 - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{n-1}^n \\ &= n^2 - \frac{1}{3} \{ n^3 - (n-1)^3 \} \\ &= n^2 - \frac{1}{3} \{ n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) \} \\ &= n - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} (-1 + 3n) \end{aligned}$$

であるから、 $a_0 = -1, a_1 = 3$ である。

(答) $a_0 = -1, a_1 = 3$

(2)

$$\begin{aligned} n^3 - \int_{n-1}^n x^3 dx &= n^3 - \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_{n-1}^n \\ &= n^3 - \frac{1}{4} \{ n^4 - (n-1)^4 \} \\ &= n^3 - \frac{1}{4} \{ n^4 - (n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1) \} \\ &= \frac{3}{2} n^2 - n + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} (1 - 4n + 6n^2) \end{aligned}$$

であるから、 $b_0 = 1, b_1 = -4, b_2 = 6$ である。

(答) $b_0 = 1, b_1 = -4, b_2 = 6$

2.

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^n x^r dx &= \left[\frac{1}{r+1} x^{r+1} \right]_{n-1}^n \\ &= \frac{1}{r+1} \{ n^{r+1} - (n-1)^{r+1} \} \\ &= \frac{1}{r+1} \left\{ n^{r+1} - \sum_{k=0}^{r+1} n^k \cdot (-1)^{r+1-k} \cdot {}_{r+1}C_k \right\} \\ &= -\frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^r n^k \cdot (-1)^{r+1-k} \cdot {}_{r+1}C_k \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} n^r - \int_{n-1}^n x^r dx &= n^r + \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^r n^k \cdot (-1)^{r+1-k} \cdot {}_{r+1}C_k \\ &= n^r + \frac{1}{r+1} \left\{ \sum_{k=0}^{r-1} n^k \cdot (-1)^{r+1-k} \cdot {}_{r+1}C_k + n^r \cdot (-1) \cdot (r+1) \right\} \\ &= \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r-1} n^k \cdot (-1)^{r+1-k} \cdot {}_{r+1}C_k \end{aligned}$$

である。これより、 $a_k = (-1)^{r+1-k} \cdot {}_{r+1}C_k$ ($k = 0, 1, \dots, r-1$) となる。

(答) $a_k = (-1)^{r+1-k} \cdot {}_{r+1}C_k$ ($k = 0, 1, \dots, r-1$)

3.

前問の等式について、

$$\begin{aligned} 1^r - \int_0^1 x^r dx &= \frac{1}{r+1} (a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + \dots + a_{r-1} \cdot 1^{r-1}) \\ 2^r - \int_1^2 x^r dx &= \frac{1}{r+1} (a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_{r-1} \cdot 2^{r-1}) \\ &\vdots \\ n^r - \int_{n-1}^n x^r dx &= \frac{1}{r+1} (a_0 + a_1 \cdot n + a_2 \cdot n^2 + \dots + a_{r-1} \cdot n^{r-1}) \end{aligned}$$

が成り立つ。辺々加えると、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (1^r + 2^r + \dots + n^r) - \left(\int_0^1 x^r dx + \int_1^2 x^r dx + \dots + \int_{n-1}^n x^r dx \right) \\ &= S_r(n) - \int_0^n x^r dx \\ &= S_r(n) - \left[\frac{1}{r+1} x^{r+1} \right]_0^n \\ &= S_r(n) - \frac{1}{r+1} n^{r+1} \\ (\text{右辺}) &= \frac{1}{r+1} \{ a_0 (1+1+\dots+1) + a_1 (1+2+\dots+n) + \dots + a_{r-1} (1^{r-1} + 2^{r-1} + \dots + n^{r-1}) \} \\ &= \frac{1}{r+1} (a_0 S_0(n) + a_1 S_1(n) + \dots + a_{r-1} S_{r-1}(n)) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_r(n) - \frac{1}{r+1} n^{r+1} &= \frac{1}{r+1} (a_0 S_0(n) + a_1 S_1(n) + \dots + a_{r-1} S_{r-1}(n)) \\ \therefore S_r(n) &= \frac{1}{r+1} (a_0 S_0(n) + a_1 S_1(n) + \dots + a_{r-1} S_{r-1}(n) + n^{r+1}) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)