

〔 I 〕

〔解答〕

I

G

〔解説〕

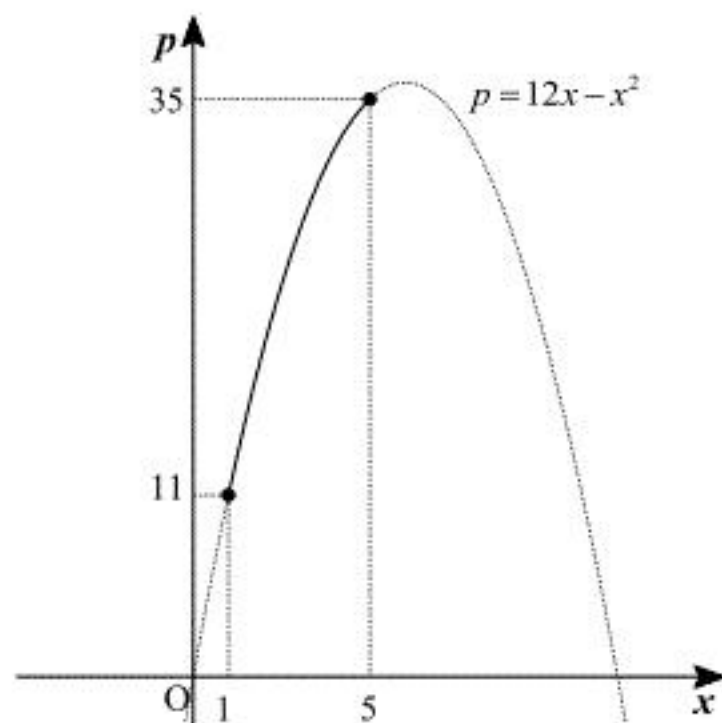
$x \neq 0$ より,

$$y = \log_2 (12x^2 - x^3) - \log_2 x = \log_2 \frac{12x^2 - x^3}{x} = \log_2 (12x - x^2)$$

となる。また、 $p = 12x - x^2$ とすれば、

$$p = 12x - x^2 = -(x-6)^2 + 36$$

となり、次図のように最大値は $x=5$ で 35、最小値は $x=1$ で 11 をとる。



よって、 $\alpha = \log_2 35$, $\beta = \log_2 11$ となるので、

$$\alpha + \beta = \log_2 35 + \log_2 11 = \log_2 385$$

である。

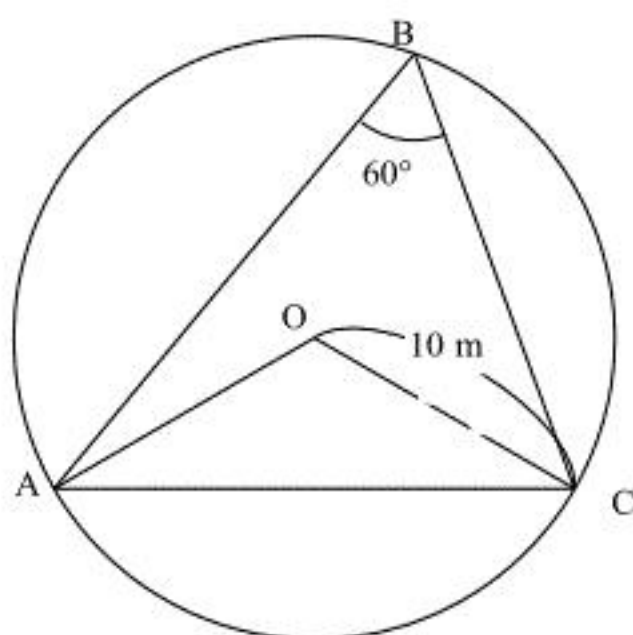
〔Ⅱ〕

〔解答〕

2	K
---	---

〔解説〕

Aさんのいる点を点A、Bさんのいる点を点B、木のある点を点Cとする。また、これら3点を通る円の中心を点Oとする。このとき、これらの点の位置関係は次図のようになる。

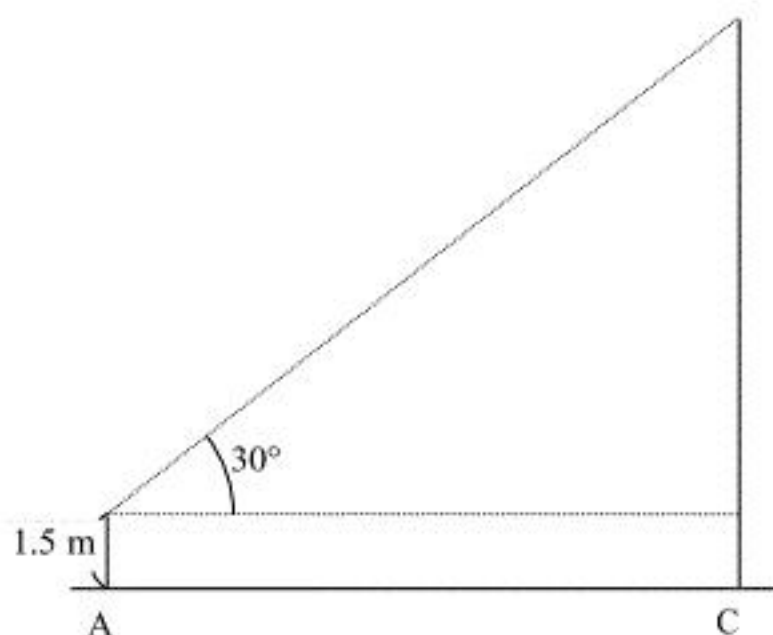


△ABCにおいて正弦定理より、

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow AC = 10\sqrt{3} \text{ [m]}$$

であることが分かる。また、Aさんと木の位置関係は次図のようになる。



Aさんから木の先端を見た仰角が 30° であり、Aさんの目の高さが1.5 mだから、木の高さは

$$10\sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ + 1.5 = 11.5 \text{ [m]}$$

である。

〔Ⅲ〕

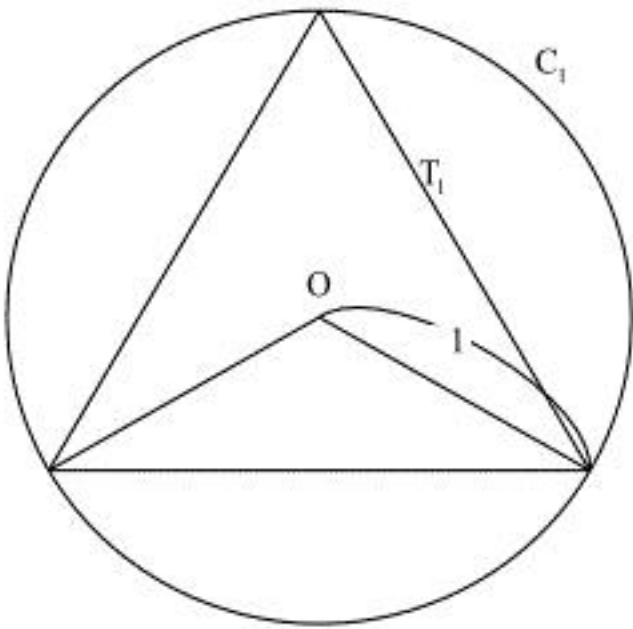
〔解答〕

3	E
4	C
5	D

〔解説〕

(1)

円 C_1 の中心を点 O とする。このとき、円 C_1 と正三角形 T_1 の位置関係は次図のようになる。



正三角形 T_1 の一辺の長さを a とすると、正弦定理より、

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{3}$$

となる。よって、正三角形 T_1 の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

である。

(2)

正三角形 T_1 の一辺の長さは $\sqrt{3}$ であるから、正三角形 T_1 の内接円の半径を r_2 とすると正三角形 T_1 の面積は、

$$\frac{r_2}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}r_2}{2}$$

となる。よって、(1)の結果より

$$\frac{3\sqrt{3}r_2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow r_2 = \frac{1}{2}$$

となる。円 C_2 の半径は r_2 であるから、円 C_2 の面積は

$$\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

である。

(3)

円 C_n の半径を r_n とすると、(1), (2)と同様にして

$$r_{n+1} = \frac{1}{2} r_n$$

となる。 $r_1 = 1$ より、数列 $\{r_n\}$ は初項1、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから、

$$r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。よって、円 C_n の面積を S_n とすると、

$$S_n = \pi \cdot r_n^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \pi$$

である。求める面積の合計は、

$$\sum_{n=1}^5 S_n = \pi \sum_{n=1}^5 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5}{1 - \frac{1}{4}} \pi = \frac{341}{256} \pi$$

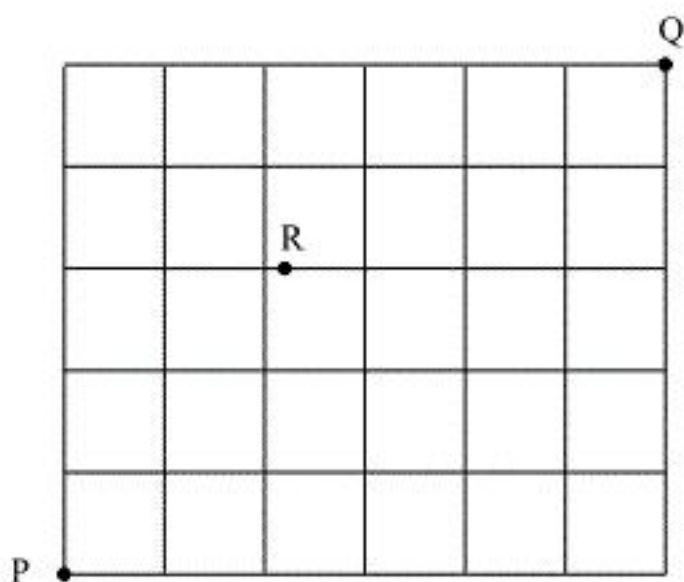
である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

6	F
7	G
8	E

〔解説〕



(1)

P から Q まで最短距離で行くには、東に 6 回、北に 5 回進めばよい。よって、求める道順の総数は

$$_{11}C_5 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462 \text{ (通り)}$$

である。

(2)

R を通って P から Q まで最短距離で行くには、はじめの 5 回で東に 2 回、北に 3 回進み、その後東に 1 回進み、次の 5 回で東に 3 回、北に 2 回進めばよい。よって、その道順の総数は

$$_5C_2 \cdot _5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 100 \text{ (通り)}$$

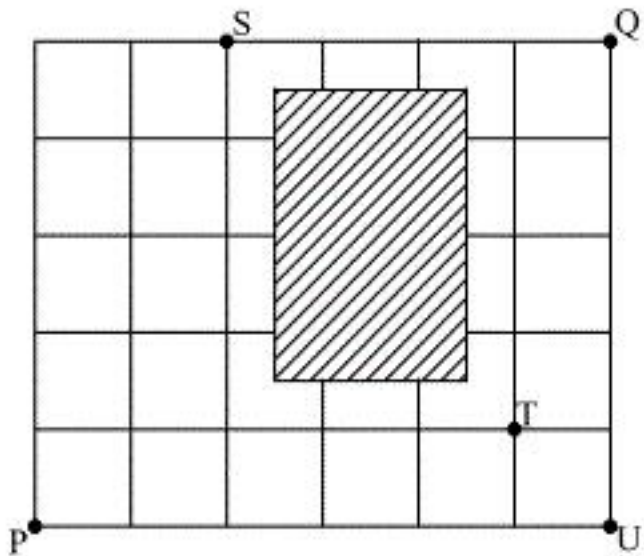
である。よって、R を通らずに P から Q まで最短距離で行く道順の総数は、(1)の結果を利用して

$$462 - 100 = 362 \text{ (通り)}$$

となる。

(3)

下図のように S, T, U を定義する。



このとき求める道順の総数は、S を通って P から Q まで最短距離で行く道順、T を通って P から Q まで最短距離で行く道順、U を通って P から Q まで最短距離で行く道順の総数である。S を通って P から Q まで最短距離で行くには、はじめの 7 回で東に 2 回、北に 5 回進み、その後東に 4 回進めばよい。よって、その道順の総数は

$$_7C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \text{ (通り)}$$

である。T を通って P から Q まで最短距離で行くには、はじめの 6 回で東に 5 回、北に 1 回進み、次の 5 回で東に 1 回、北に 4 回進めばよい。よって、その道順の総数は

$$_6C_1 \cdot _5C_1 = 6 \cdot 5 = 30 \text{ (通り)}$$

である。U を通って P から Q まで最短距離で行くには、はじめに東に 6 回進み、その後北に 5 回進めばよい。よって、その道順の総数は 1 通りである。以上より求める道順の総数は、

$$21 + 30 + 1 = 52 \text{ (通り)}$$

である。

〔V〕

〔解答〕

101	$2tx - t^2$
9	G
10	B

〔解説〕

$C_1: y = x^2$ を x で微分すると、
 $y' = 2x$

である。よって、点 $P(t, t^2)$ における曲線 $y = x^2$ の接線 ℓ の方程式は、

$$y - t^2 = 2t(x - t) \Leftrightarrow y = 2tx - t^2$$

となる。この接線が曲線 $C_2: y = x^2 - 4x + 12$ と接するとき、2式から y を消去した

$$2tx - t^2 = x^2 - 4x + 12 \Leftrightarrow x^2 - (2t + 4)x + t^2 + 12 = 0$$

が重解を持つ。この x についての2次方程式の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = (t + 2)^2 - (t^2 + 12) = 4t - 8$$

であり、重解を持つとき

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 2 \end{aligned}$$

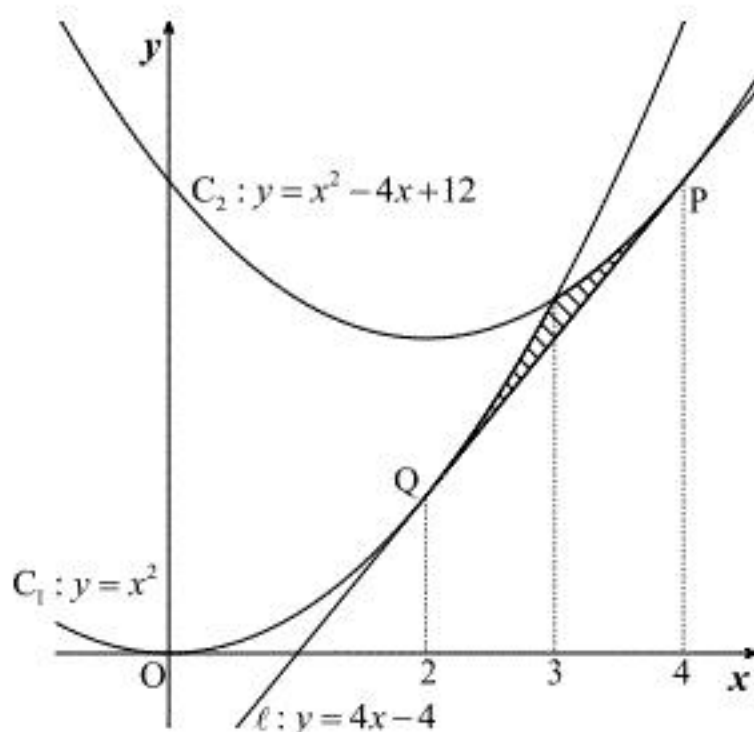
となる。このとき、

$$\begin{aligned} x^2 - (2t + 4)x + 12 + t^2 &= x^2 - 8x + 16 \\ &= (x - 4)^2 \end{aligned}$$

であるから、点 Q の x 座標は4である。また、2つの曲線 C_1, C_2 の交点の x 座標は、2式 $y = x^2, y = x^2 - 4x + 12$ から y を消去して

$$x^2 = x^2 - 4x + 12 \Leftrightarrow x = 3$$

となる。よって、以下のような図がかける。



2つの曲線 C_1, C_2 と接線 ℓ で囲まれた図形の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_2^3 \{x^2 - (4x - 4)\} dx + \int_3^4 \{(x^2 - 4x + 12) - (4x - 4)\} dx \\ &= \int_2^3 (x - 2)^2 dx + \int_3^4 (x - 4)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - 2)^3 \right]_2^3 + \left[\frac{1}{3}(x - 4)^3 \right]_3^4 \\ &= \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + \left\{ 0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right\} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

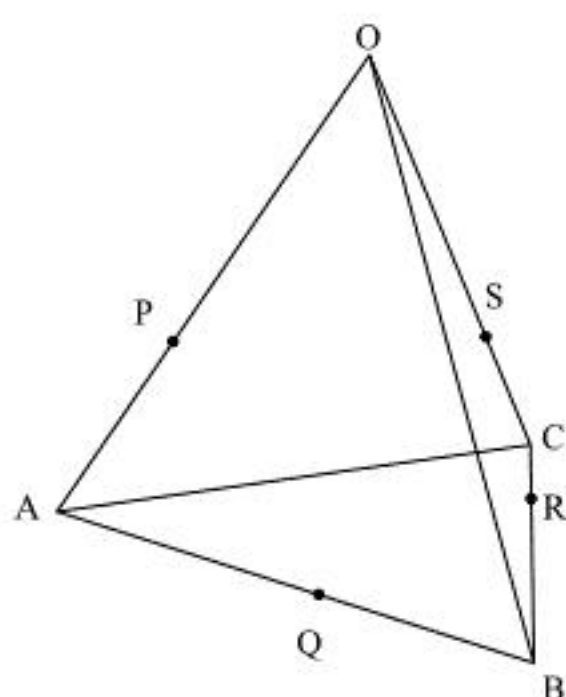
である。

〔VI〕

〔解答〕

11	D
12	A
13	A
14	G
15	J
102	$\frac{t}{3-2t}$

〔解説〕



(1)

問題文より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{3}{3+2} \overrightarrow{OA} = \frac{3}{5} \vec{a} \\ \overrightarrow{OQ} &= \frac{1-k}{k+(1-k)} \overrightarrow{OA} + \frac{k}{k+(1-k)} \overrightarrow{OB} = (1-k) \vec{a} + k \vec{b} \\ \overrightarrow{OR} &= \frac{1}{2+1} \overrightarrow{OB} + \frac{2}{2+1} \overrightarrow{OC} = \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c} \\ \overrightarrow{OS} &= \frac{t}{t+(1-t)} \overrightarrow{OC} = t \vec{c}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OS} = \frac{3}{5} \vec{a} - t \vec{c} \\ \overrightarrow{SQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OS} = (1-k) \vec{a} + k \vec{b} - t \vec{c} \\ \overrightarrow{SR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c} - t \vec{c} = \frac{1}{3} \vec{b} + \left(\frac{2}{3} - t \right) \vec{c}\end{aligned}$$

である。

(2)

4点 P, Q, R, S が同一平面上にあるとき,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SQ} &= x \overrightarrow{SP} + y \overrightarrow{SR} \\ &= x \left(\frac{3}{5} \vec{a} - t \vec{c} \right) + y \left\{ \frac{1}{3} \vec{b} + \left(\frac{2}{3} - t \right) \vec{c} \right\} \\ &= \frac{3}{5} x \vec{a} + \frac{1}{3} y \vec{b} + \left(-xt + \frac{2}{3} y - yt \right) \vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。(1)より $\overrightarrow{SQ} = (1-k) \vec{a} + k \vec{b} - t \vec{c}$ であり, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は1次独立であるから,

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x = 1-k & \dots\dots ① \\ \frac{1}{3}y = k & \dots\dots ② \\ -xt + \frac{2}{3}y - yt = -t & \dots\dots ③ \end{cases}$$

となる。①, ②より,

$$\begin{aligned}x &= \frac{5}{3}(1-k) \\ y &= 3k\end{aligned}$$

である。これらを③に代入して

$$\begin{aligned}-\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3}k \right)t + \frac{2}{3}(3k) - 3kt &= -t \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}t + 2 \right)k &= \frac{2}{3}t \\ \Leftrightarrow k &= \frac{t}{3-2t} \quad (\because 0 < t < 1 \text{ より } 3-2t \neq 0)\end{aligned}$$

となる。 $0 < t < 1$ より, $k = \frac{t}{3-2t} > 0, 1-k = \frac{3(1-t)}{3-2t} > 0$ だから, これは $0 < k < 1$ を満たす。