

【I】

【解答】

	最大	最小
(1)	B	C
(2)	C	B
(3)	A	C
(4)	A	B
(5)	C	A

【解説】

(1)

$2^{\frac{1}{2}}$ と $3^{\frac{1}{3}}$ について、ともに6乗すると、

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8,\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$$

であるから、

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6<\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6$$

である。また、 $2^{\frac{1}{2}}>0,3^{\frac{1}{3}}>0$ であるから、

$$2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$$

である。また、 $2^{\frac{1}{2}}$ と $4^{\frac{1}{3}}$ について、基数に関して $2>1$ であるので、 2^x は単調増加し、

$$4^{\frac{1}{3}}=\left(2^2\right)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。以上より、

$$4^{\frac{1}{3}}<2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$$

である。

(2)

$0^\circ<x<90^\circ$ において、 $\sin x$ は単調増加であるから、

$$\cos 50^\circ=\sin 40^\circ<\sin 50^\circ$$

が成り立ち、さらに、 $0<\cos 50^\circ<1,0<\sin 50^\circ$ から

$$\sin 50^\circ<\frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ}=\tan 50^\circ$$

が得られるから、

$$\cos 50^\circ<\sin 50^\circ<\tan 50^\circ$$

である。

【別解】

$0^\circ<x<90^\circ$ において、 $\sin x, \cos x, \tan x$ はそれぞれ単調増加、単調減少、単調増加であるから、

$0^\circ<45^\circ<50^\circ<60^\circ<90^\circ$ に対して、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}&=\sin 45^\circ<\sin 50^\circ<\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}&=\cos 60^\circ<\cos 50^\circ<\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1&=\tan 45^\circ<\tan 50^\circ<\tan 60^\circ=\sqrt{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\cos 50^\circ<\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 50^\circ<\frac{\sqrt{3}}{2}<1<\tan 50^\circ$$

であるから、

$$\cos 50^\circ<\sin 50^\circ<\tan 50^\circ$$

である。

(3)

$0<a<a^2$ であることより、 $1<a$ であるから、

$$1<a<b<a^2$$

である。不等式の全ての辺で底を a とする対数をとると、 $a>1$ より、

$$\begin{aligned}\log_a 1<\log_a a<\log_a b<\log_a a^2 \\ \Leftrightarrow 0<1<\log_a b<2\end{aligned}$$

となる。また、同様に底を b とする対数をとると、 $b>1$ より、

$$\begin{aligned}\log_b 1<\log_b a<\log_b b<\log_b a^2 \\ \Leftrightarrow 0<\log_b a<1<2\log_b a\end{aligned}$$

となる。これら2つの不等式より、

$$\begin{aligned}\log_b a<1<\log_a b & \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \\ 1<2\log_b a & \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}\end{aligned}$$

が得られる。ここで②より、

$$\begin{aligned}1-\log_b a<\log_b a \\ \Leftrightarrow \log_b b-\log_b a<\log_b a \\ \therefore \log_b \frac{b}{a}<\log_b a\end{aligned}$$

であるから、①とあわせて、

$$\log_b \frac{b}{a}<\log_b a<\log_a b$$

となる。

(4)

x^2-x-10 を $x-4$ で割ったときの余りを r_A 、 $2x^2-5x-3$ を $x-3$ で割ったときの余りを r_B 、

$3x^2+7x-5$ を $x+3$ で割ったときの余りを r_C とおくと、剰余の定理により、

$$\begin{aligned}r_A&=4^2-4-10=2 \\ r_B&=2\cdot 3^2-5\cdot 3-3=0 \\ r_C&=3\cdot (-3)^2+7\cdot (-3)-5=1\end{aligned}$$

となる。よって、

$$r_B<r_C<r_A$$

である。

(5)

C_1 と C_2 、 C_2 と C_3 、 C_3 と C_1 が共有する点の個数をそれぞれ N_A, N_B, N_C とおく。 $x\geq 0$ におい

て、 C_1 と C_2 の方程式から y を消去して得られる2次方程式

$$\begin{aligned}x-1&=x^2 \\ \Leftrightarrow x^2-x+1&=0\end{aligned}$$

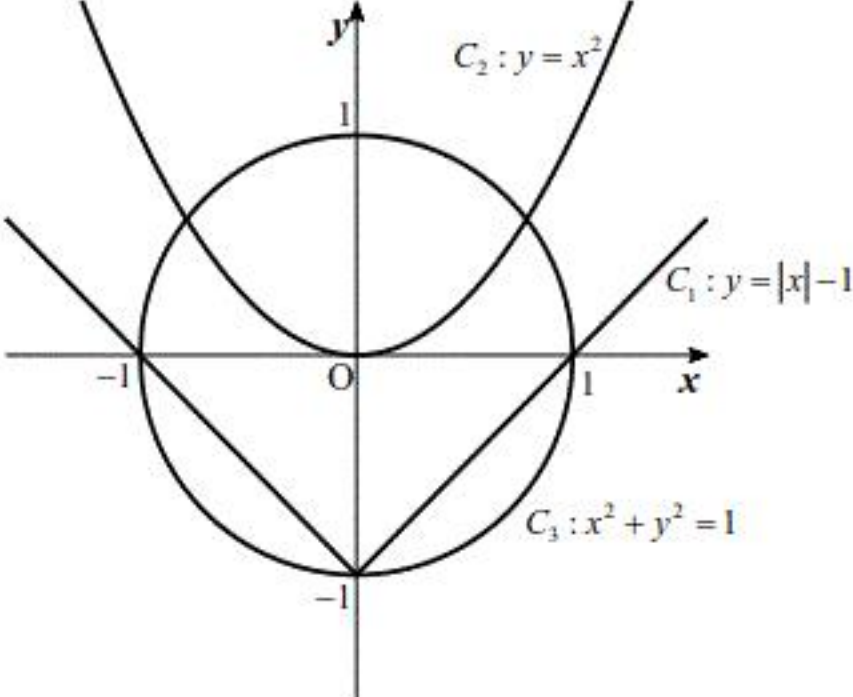
の判別式を D とおくと、

$$D=\left(-1\right)^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$$

であるから、 C_1 と C_2 は共有点を持たない。また、 C_1, C_2 はともに y 軸に関して対称であるから、対称性より、 $x<0$ においても共有点を持たない。よって、

$$N_A=0$$

である。ここで、 C_1, C_2, C_3 をグラフに図示すると、以下のようになる。



グラフより、 $N_B=2, N_C=3$ であるから、

$$N_A<N_B<N_C$$

である。

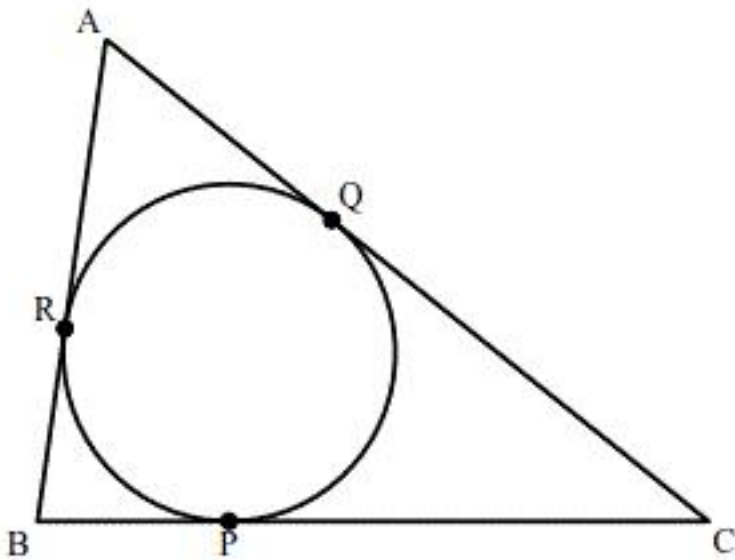
〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	5
	イ	2
(2)	ウ	1
	エ	2
	オ	1
	カ	1
	キ	3
(3)	ク	3
	ケ	4
(4)	コ	3
	サ	0
	シ	7
	ス	0

〔解説〕

(1)



△ABCの内接円と辺CA, ABの接点をそれぞれQ, Rとすると, △ABCの各辺は内接円の接線であるから,
AQ = AR, BR = BP, CP = CQ
が成り立つ。したがって, BPについて

$$\begin{aligned}BP &= BC - CP \\&= BC - CQ \\&= BC - (CA - AQ) \\&= BC - CA + AR \\&= BC - CA + (AB - BR) \\&= AB + BC - CA - BP\end{aligned}$$

と変形でき,

$$BP = \frac{AB + BC - CA}{2} = \frac{5 + 7 - 8}{2} = 2$$

である。また,

$$CP = BC - BP = 7 - 2 = 5$$

であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow 7\overrightarrow{AP} &= 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

である。

(2)

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d , 等比数列 $\{b_n\}$ の公比を r とおく(d, r は実数)と $a_1 = b_1 = 1$ より,

$$\begin{aligned}a_2 + b_2 &= a_4 + b_4 = 10 \\ \Leftrightarrow 1 + d + r &= 1 + 3d + r^3 = 10 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} d + r = 9 \\ 3d + r^3 = 9 \end{cases}\end{aligned}$$

となる。 d を消去して,

$$\begin{aligned}r^3 + 3(9 - r) &= 9 \\ \Leftrightarrow r^3 - 3r + 18 &= 0 \\ \Leftrightarrow (r + 3)(r^2 - 3r + 6) &= 0\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$r^2 - 3r + 6 = \left(r - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$$

より, $r = -3$ が得られる。このとき,

$$d = 9 - r = 9 - (-3) = 12$$

である。よって, $\{a_n\}$ は初項1, 公差12の等差数列, $\{b_n\}$ は初項1, 公比-3の等比数列であるから,

$$\begin{aligned}a_n &= 1 + 12(n - 1) = 12n - 11 \\ b_n &= (-3)^{n-1}\end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned}2\log_{\frac{1}{4}}(x - 3) + \log_{\frac{1}{2}}x &> -2 \\ \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x - 3) + \log_{\frac{1}{2}}x &> \log_{\frac{1}{2}}4 \\ \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}x(x - 3) &> \log_{\frac{1}{2}}4\end{aligned}$$

であり, 底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから,

$$\begin{aligned}x(x - 3) &< 4 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) &< 0 \\ \therefore -1 &< x < 4\end{aligned}$$

となる。 $x > 3$ とあわせて,

$$3 < x < 4$$

を得る。

(4)

四角形の個数は, タテ, ヨコそれぞれの, 辺を含む線分5本ずつから, 四角形を構成するものを2本ずつ選ぶ場合の数に等しい。選んだ線分が正方形を構成するのは, タテ, ヨコそれぞれで, 同じ幅の線分を選んだ場合であるから,

$${}_4C_1 \cdot {}_4C_1 + {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 + {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 + {}_1C_1 \cdot {}_1C_1 = 16 + 9 + 4 + 1 = 30 \text{ (個)}$$

である。また, 図には全体として,

$${}_5C_2 \cdot {}_5C_2 = 10 \cdot 10 = 100 \text{ (個)}$$

の四角形が存在し, そのすべては正方形を含む長方形であるから, 正方形ではない長方形は

$$100 - 30 = 70 \text{ (個)}$$

である。

【Ⅲ】

【解答】

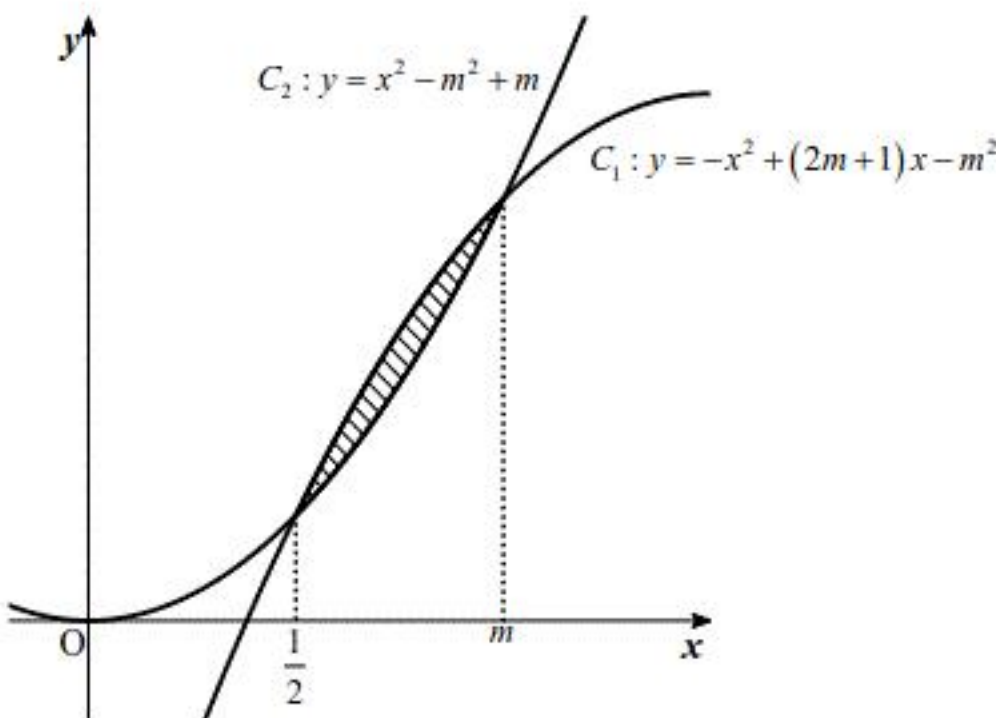
$$(1) A = 2m + 1, B = -m^2$$

$$(2) x = \frac{1}{2}, m$$

(3)

放物線 C_1 と C_2 で囲まれる領域の面積を S とする。 $\frac{1}{2}$ と m の大小関係で場合分けを行う。

[1] $m \geq \frac{1}{2}$ のとき



グラフより、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^m \left\{ -x^2 + (2m+1)x - m^2 - (x^2 - m^2 + m) \right\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^m \left\{ -2x^2 + (2m+1)x - m \right\} dx \\ &= -2 \int_{\frac{1}{2}}^m \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - m) dx \\ &= \frac{2}{6} \left(m - \frac{1}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(m - \frac{1}{2} \right)^3 \end{aligned}$$

である。条件より、 $S = -\frac{1}{3}m^3 + \frac{3}{8}m^2$ を考えると、

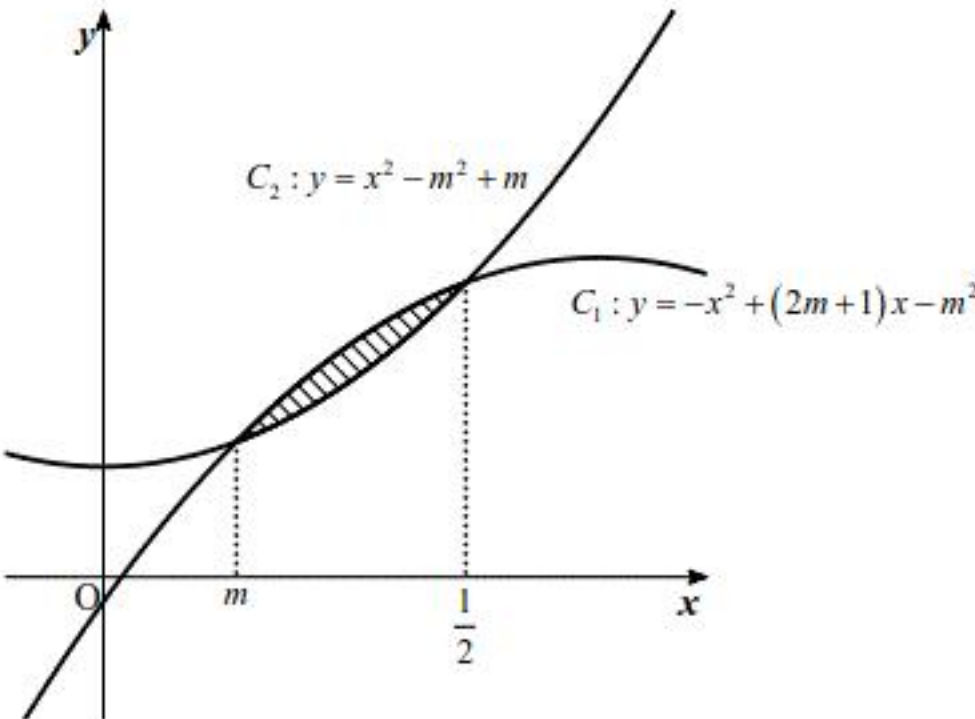
$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left(m - \frac{1}{2} \right)^3 &= -\frac{1}{3}m^3 + \frac{3}{8}m^2 \\ \Leftrightarrow 8m^3 - 12m^2 + 6m - 1 &= -8m^3 + 9m^2 \\ \Leftrightarrow 16m^3 - 21m^2 + 6m - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m-1)(16m^2 - 5m + 1) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$16m^2 - 5m + 1 = 16 \left(m - \frac{5}{32} \right)^2 + \frac{39}{64} > 0$$

であるから、 $m = 1$ を得て、これは $m \geq \frac{1}{2}$ を満たすから、 $S = -\frac{1}{3}m^3 + \frac{3}{8}m^2$ を満たす m は $m = 1$ である。

[2] $m < \frac{1}{2}$ のとき



グラフより、

$$\begin{aligned} S &= \int_m^{\frac{1}{2}} \left\{ -x^2 + (2m+1)x - m^2 - (x^2 - m^2 + m) \right\} dx \\ &= \int_m^{\frac{1}{2}} \left\{ -2x^2 + (2m+1)x - m \right\} dx \\ &= -2 \int_m^{\frac{1}{2}} (x - m) \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{2}{6} \left(\frac{1}{2} - m \right)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - m \right)^3 \end{aligned}$$

である。条件より、 $S = -\frac{1}{3}m^3 + \frac{3}{8}m^2$ を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - m \right)^3 &= -\frac{1}{3}m^3 + \frac{3}{8}m^2 \\ \Leftrightarrow -8m^3 + 12m^2 - 6m + 1 &= -8m^3 + 9m^2 \\ \Leftrightarrow 3m^2 - 6m + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(m - \frac{3-\sqrt{6}}{3} \right) \left(m - \frac{3+\sqrt{6}}{3} \right) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $m < \frac{1}{2}$ であるから、 $S = -\frac{1}{3}m^3 + \frac{3}{8}m^2$ を満たす m は $m = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$ である。

[1], [2]より、求める m の値は $m = 1, \frac{3-\sqrt{6}}{3}$ である。

(答) $m = 1, \frac{3-\sqrt{6}}{3}$

【解説】

(1)

放物線 $C_1: y = -x^2 + Ax + B$ と直線 $y = x$ が接し、その点の x 座標が m であることから、方程式

$$\begin{aligned} -x^2 + Ax + B &= x \\ \Leftrightarrow x^2 + (1-A)x - B &= 0 \end{aligned}$$

は重解 $x = m$ を持つ。よって、解と係数の関係より

$$\begin{cases} A-1 = 2m \\ -B = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2m+1 \\ B = -m^2 \end{cases}$$

である。

(2)

放物線 $C_1: y = -x^2 + (2m+1)x - m^2$ と放物線 $C_2: y = x^2 - m^2 + m$ について、2 式より y を消去すると

$$\begin{aligned} -x^2 + (2m+1)x - m^2 &= x^2 - m^2 + m \\ \Leftrightarrow 2x^2 - (2m+1)x + m &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x-1)(x-m) &= 0 \end{aligned}$$

となるから、放物線 C_1 と C_2 のすべての交点の x 座標は $x = \frac{1}{2}, m$ である。

〔IV〕

〔解答〕

(1) 2

(2)

3より大きな素数は奇数であるから、 p が3より大きな素数であるとき、 p は奇数である。よって、(1)より

$$2^p \equiv 2 \pmod{3}$$

である。また、 p は3でない素数であるから、 $p \equiv \pm 1 \pmod{3}$ であり、

$$p^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

である。したがって、

$$2^p + p^2 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

となるから、 p が3より大きな素数であるとき、 $2^p + p^2$ は3の倍数である。

(証明終)

(3) $p = 3$

〔解説〕

(1)

n が奇数であるとき、非負整数 m を用いて $n = 2m + 1$ と置ける。このとき、

$$\begin{aligned} 2^n &= 2^{2m+1} \\ &= 2 \cdot 4^m \\ &\equiv 2 \cdot 1^m \pmod{3} \\ &\equiv 2 \pmod{3} \end{aligned}$$

である。

(3)

p の値で場合分けして考える。

[1] $p = 2$ のとき

$$2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

より、 $2^p + p^2$ は素数ではない。

[2] $p = 3$ のとき

$$2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$$

より、 $2^p + p^2$ は素数である。

[3] p が3より大きな素数であるとき

このとき、(2)より $2^p + p^2$ は3の倍数であり、

$$2^p + p^2 > 2^3 > 3$$

であるから、 $2^p + p^2$ は3より大きい3の倍数である。よって、 $2^p + p^2$ は素数ではない。

[1], [2], [3]より、 p が素数であり、かつ、 $2^p + p^2$ も素数であるような p は $p = 3$ である。

〔V〕

〔解答〕

(1)	$\frac{1}{64}$
(2)	$\frac{5}{1024}$
(3)	$\frac{25}{1024}$
(4)	$\frac{35}{4096}$
(5)	$\frac{15}{2048}$

〔解説〕

(1)

3回の操作後に点Pが座標(3, 0)に位置するのは、3回の操作すべてで(i)が実行される場合で、その確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

である。

(2)

6回の操作後に点Pが座標(3, 3)に位置するのは、6回の操作のうち、(i)が3回、(ii)が3回実行される場合で、その確率は

$${}_6C_3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{20}{4^6} = \frac{5}{1024}$$

である。

(3)

5回の操作後に点Pが座標(3, 0)に位置するのは、5回の操作のうち、3回(i)が実行され、残りの2回で(ii)と(iii)、あるいは(ii)と(iv)が実行される場合であり、その確率は

$${}_5P_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + {}_5P_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5+20}{4^5} = \frac{25}{1024}$$

である。

(4)

8回の操作後に点Pが座標(3, 3)に位置するのは、8回の操作のうち、3回(i)が、3回(ii)が実行され、残りの2回で(i)と(iii)、あるいは(ii)と(iv)が実行される場合であり、その確率は

$$8 \cdot {}_7C_3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 8 \cdot {}_7C_3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{35+35}{2^{13}} = \frac{35}{4096}$$

である。

(5)

8回の操作後に点Pが初めて座標(3, 3)に位置する確率は、(4)の確率から、8回より前に一度座標(3, 3)に位置する確率を引けばよい。8回より前に一度座標(3, 3)に位置するのは、6回の操作後に座標(3, 3)に位置し、その後の2回で(i)と(iii)、あるいは(ii)と(iv)が実行される場合であり、その確率は、(2)より、

$$\frac{5}{1024} \cdot 2 \cdot {}_2C_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{4096}$$

である。よって、求める確率は

$$\frac{35}{4096} - \frac{5}{4096} = \frac{15}{2048}$$

である。