

【 I 】

【解答】

(1)	あ	
	$\frac{4}{\pi^2 - 2}$	
(2)	い	う
	$\log 2$	$\frac{1}{4}$

【解説】

(1)

$\int_0^\pi t f(t) dt = a$ とおく。 $f(t) = a + \cos t$ となるから、両辺に t をかけて、

$$tf(t) = at + t \cos t$$

となる。両辺を $t = 0$ から $t = \pi$ まで積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi tf(t) dt &= \int_0^\pi at dt + \int_0^\pi t \cos t dt \\ &= \left[\frac{1}{2} at^2 \right]_0^\pi + [t \sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t dt \\ &= \frac{1}{2} a\pi^2 + 0 - [-\cos t]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2} a\pi^2 - 2 \end{aligned}$$

が得られ、 $\int_0^\pi tf(t) dt = a$ であるから、

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} a\pi^2 - 2 \\ \therefore a &= \frac{4}{\pi^2 - 2} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} \int te^{-t} dt &= -te^{-t} - \int -e^{-t} dt \quad (\text{ただし } C \text{ は積分定数}) \\ &= -e^{-t}(t+1) + C \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} f(x) &= -e^{-x-\log 2}(x + \log 2 + 1) + e^{-x}(x+1) \\ &= -\frac{e^{-x}}{2}(x + \log 2 + 1) + e^{-x}(x+1) \\ &= \frac{e^{-x}}{2}(x - \log 2 + 1) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{e^{-x}}{2}(x - \log 2 + 1) + \frac{e^{-x}}{2} \\ &= -\frac{e^{-x}}{2}(x - \log 2) \end{aligned}$$

が得られる。したがって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	$\log 2$	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	(極大)	$\searrow$

よって、増減表より、 $f(x)$ は $x = \log 2$ において最大値 $f(\log 2) = \frac{1}{4}$ をとると分かる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア			
	⑦			
(2)	イ			
	⑧			
(3)	ウ	エ	オ	
	5	4	0	

〔解説〕

(1)

2倍角の公式より、 $n^2 \log \left(\cos \frac{a}{n} \right) = n^2 \log \left(1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2n} \right)$ と変形できる。ここで、 $2 \sin^2 \frac{a}{2n} = t$ とおくと、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $t \rightarrow 0 \left(\because 0 < a < \frac{\pi}{2} \right)$ である。したがって、

$$\begin{aligned} n^2 \log(1-t) &= n^2 \log \left\{ (1-t)^{-\frac{1}{t}} \right\}^{-t} \\ &= -n^2 t \log(1-t)^{-\frac{1}{t}} \\ &= -2 \cdot \left(\frac{\sin \frac{a}{2n}}{\frac{a}{2n}} \right)^2 \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 \log(1-t)^{-\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

と変形できるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \log \left(\cos \frac{a}{n} \right) &= -2 \cdot 1 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 1 \\ &= -\frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$B=0$ のとき、与えられた不等式は

$$pA^2 \geq A^2$$

となり、これは $p>1$ において常に成り立つ。よって q は任意の値を取ることが出来る。

$B \neq 0$ のとき、与えられた不等式を変形すると、 $B^2 > 0$ より

$$q \geq \frac{(A+B)^2 - pA^2}{B^2} = \left(\frac{A}{B} \right)^2 + 2 \left(\frac{A}{B} \right) + 1 - p \left(\frac{A}{B} \right)^2$$

となり、 $\frac{A}{B} = X$ とおくと、

$$q \geq (1-p)X^2 + 2X + 1 = (1-p) \left(X + \frac{1}{1-p} \right)^2 + \frac{p}{p-1}$$

となるので、求める最小の q は、 $q = \frac{p}{p-1}$ となる。

(3)

1, 2, 3を使ってできる6桁の数字は全部で $3^6 = 729$ 個あり、そのうち、1種類の数字だけが使われている整数は

$$1 \times 3 = 3 \text{ 個}$$

あり、2種類の数字だけが使われている整数は、

$$(2^6 - 2) \times 3 = 186 \text{ 個}$$

あるので、題意を満たすような整数は全部で、

$$729 - (3 + 186) = 540 \text{ 個}$$

ある。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	か	
	$\frac{7}{27}$	
(2)	き	く
	$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

〔解説〕

(1)

点Pは時刻0では頂点Aに位置するので、1秒後について、等確率でB, C, Dのいずれかに位置し、Aにいる確率は0である。2秒後について、B, C, Dいずれかの位置から $\frac{1}{3}$ の確率でA

に移動するので、Aにいる確率は $\frac{1}{3}$ である。3秒後について、2秒後の時点ではB, C, Dに

$\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ の確率で位置するので、3秒後にAにいる確率は $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ である。同様にして、4

秒後について、3秒後の時点では、B, C, Dに $\left(1 - \frac{2}{9}\right) = \frac{7}{9}$ の確率で位置するので、4秒後にA

にいる確率は $\frac{7}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{27}$ である。

(2)

移動の対称性より、頂点C, Dに存在する確率は頂点Bに存在する確率と等しく、 q_n である。

また、点Pは必ず頂点のいずれかに位置しているので、

$$p_n + 3q_n = 1 \quad \cdots \text{①}$$

が成り立つ。ここで、 n 秒後に点Pが頂点Aに位置するとき、 $n+1$ 秒後に頂点Aに位置することはなく、 n 秒後に点Pが頂点B, C, Dのいずれかに位置するとき、 $n+1$ 秒後に頂点Aに

位置する確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$ であるから、

$$p_{n+1} = \left(q_n \times \frac{1}{3}\right) \times 3 = q_n \quad \cdots \text{②}$$

が成り立つ。同様にして、 n 秒後に点Pが頂点Aに位置するとき、 $n+1$ 秒後に頂点B, C, Dのいずれかに位置する確率は1であり、 n 秒後に点Pが頂点B, C, Dのいずれかに位置するとき、

$n+1$ 秒後には、それぞれ $\frac{2}{3}$ の確率で頂点B, C, Dのいずれかに位置するので、

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n \quad \cdots \text{③}$$

が成り立つ。②、③より、

$$p_{n+1} - q_{n+1} = -\frac{1}{3}(p_n - q_n)$$

であり、 $p_0 = 1, q_0 = 0$ と合わせて、

$$p_n - q_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots \text{④}$$

が得られる。ここで、①+3×④より、

$$\begin{aligned} 4p_n &= 1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \therefore p_n &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

も得られる。

[IV]

(1)

$$a_2 = 2 \cdot 14 \cdot 18 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$a_3 = 3 \cdot 31 \cdot 37$$

であるから、すべての a_n に共通な約数である素数 p の候補は、 $p=3$ に絞られる。ここで、自然数 q をもちいて、 $n=3q-1, 3q, 3q+1$ のいずれかで表すことにすると、

(i) $n=3q-1$ のとき

$$\begin{aligned} a_{3q-1} &= (3q-1)(51q-37)(57q-39) \\ &= 3(3q-1)(51q-37)(19q-13) \end{aligned}$$

となるので、 a_{3q-1} の約数にはすべて3が含まれる。

(ii) $n=3q$ のとき

$$a_{3q} = 3q(51q-20)(57q-20)$$

となるので、 a_{3q} の約数にはすべて3が含まれる。

(iii) $n=3q+1$ のとき

$$\begin{aligned} a_{3q+1} &= (3q+1)(51q-3)(57q-1) \\ &= 3(3q+1)(17q-1)(57q-1) \end{aligned}$$

となるので、 a_{3q+1} の約数にはすべて3が含まれる。

以上(i), (ii), (iii)より、いずれの場合も3は約数に含まれるので、求める素数 p は確かに $p=3$ のみであることが示された。

(答) $p=3$

(2)

(1)より、 $n=3q-1$ の場合は $19n-20$ が、 $n=3q$ の場合は n が、 $n=3q+1$ の場合は $17n-20$ が3の倍数となるので $n, 17n-20, 19n-20$ のいずれかは3の倍数となる。よってこれらが全て素数となるとき、いずれかが3となる。ここで $17n-20, 19n-20$ は3にならないので $n=3$ が必要となる。逆に、 $n=3$ のとき条件を満たす。よって $n=3$ となる。

(答) $n=3$

〔V〕

(1)(i)

線分PQと平面 $z=s$ の交点について考える。交点を、 $R(X, Y, Z)$ とおくと、 R は線分PQを $(2-s):s$ に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overline{OR} &= \frac{s\overline{OP} + (2-s)\overline{OQ}}{(2-s) + s} \\ &= \frac{1}{2}s\overline{OP} + \frac{2-s}{2}\overline{OQ} \\ &= (0, 0, s) + \left(\frac{1}{8}(2-s)t^2, \frac{1}{2}(2-s)t, 0 \right) \\ &= \left(\frac{1}{8}(2-s)t^2, \frac{1}{2}(2-s)t, s \right)\end{aligned}$$

となるから、 $z=s$ 上において、 R が描く軌跡は、

$$\begin{cases} X = \frac{1}{8}(2-s)t^2 \\ Y = \frac{1}{2}(2-s)t \\ Z = s \end{cases}$$

である。

[1] $s \neq 2$ のとき

$t = \frac{2}{2-s}Y$ であるから、これを代入して、

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{8} \cdot (2-s) \cdot \frac{4}{(2-s)^2} \cdot Y^2 \\ &= \frac{1}{2(2-s)} Y^2\end{aligned}$$

となる。

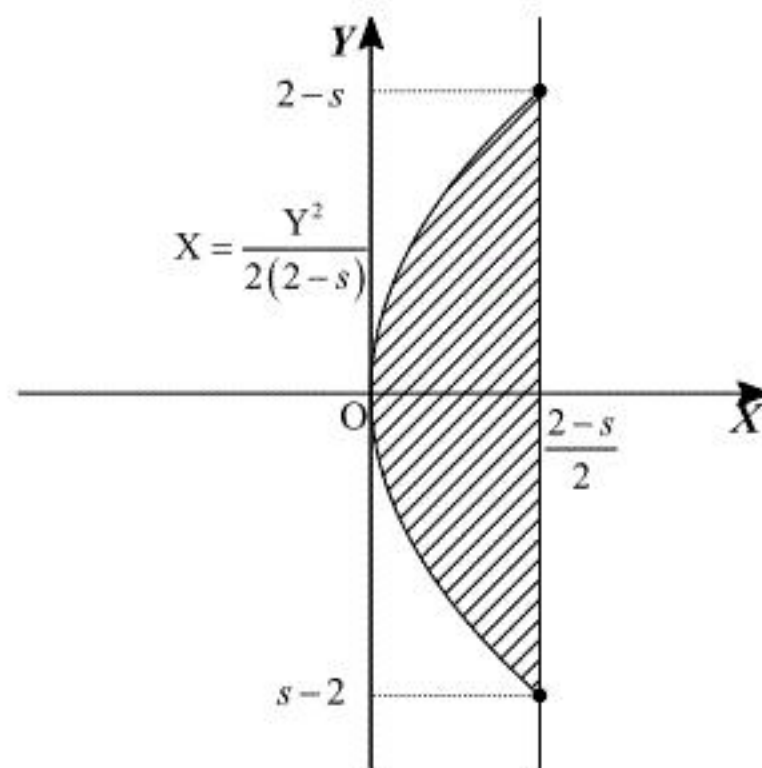
[2] $s = 2$ のとき

$X=Y=0$ である。

また、 $-2 \leq t \leq 2$ において

$$-2 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow s-2 \leq Y \leq 2-s$$

となる。以上より、切り口の面積を W とすると、 W は次の図の斜線部分の面積となる。



よって W は

$$\begin{aligned}W &= 2(2-s) \cdot \frac{2-s}{2} - 2 \int_0^{2-s} \frac{Y^2}{2(2-s)} dY \\ &= (2-s)^2 - \left[\frac{Y^3}{3(2-s)} \right]_0^{2-s} \\ &= \frac{2}{3}(2-s)^2\end{aligned}$$

となる。

(答) 切り口の面積： $\frac{2}{3}(2-s)^2$

(ii)

(i)の結果より、求める体積は、

$$\begin{aligned}K &= \int_0^2 \frac{2}{3}(2-s)^2 ds \\ &= \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{3}(2-s)^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{16}{9}\end{aligned}$$

となる。

(答) $K = \frac{16}{9}$

(2)

線分PQと球面 S の共有点を α とする。 α は線分PQ上にあるので、 $0 \leq k \leq 1$ なる実数 k を用いて、 $\overline{P\alpha} = k\overline{PQ}$ とおける。よって、 $\alpha(p, q, r)$ とおくと、成分を比較することで、

$$\begin{cases} p = \frac{1}{4}kt^2 \\ q = kt \\ r = -2k+2 \end{cases}$$

となる。これを球面 S の方程式に代入し、 k について整理すると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4}kt^2 - 1 \right)^2 + (kt)^2 + (-2k+2-1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (t^2+8)^2 k^2 - 8(t^2+8)k + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ (t^2+8)k - 4 \right\}^2 &= 0 \\ \therefore k &= \frac{4}{t^2+8}\end{aligned}$$

が得られる。 t は実数であるから、これは $0 \leq k \leq 1$ を満たす。これより、実数 t に対してただ1つの実数 k が存在するので、題意は示され、共有点の座標は

$$\left(\frac{t^2}{t^2+8}, \frac{4t}{t^2+8}, \frac{2t^2+8}{t^2+8} \right)$$

となる。

(答) $\left(\frac{t^2}{t^2+8}, \frac{4t}{t^2+8}, \frac{2t^2+8}{t^2+8} \right)$

(3)

点 R の軌跡を含む円は、 $z-x=1$ と球面 S との交円である。この円の中心を $F(x, y, z)$ として、平面 $z-x=1$ に点 $(1, 0, 1)$ から垂線を下ろすと、円の対称性より、垂線の足は F となる。ここで、 $E(1, 0, 1)$ とおくと、 $\overline{EF}$ と平面 $z-x=1$ が垂直になる。したがって、 $\overline{EF} = (x-1, y, z-1)$ と平面 $x-z+1=0$ の法線ベクトル $(1, 0, -1)$ が平行になることから、実数 l を用いて

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} &= l \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=l \\ y=0 \\ z-1=-l \end{cases} \\ \therefore x+z &= 2 \text{ かつ } y=0 \end{aligned}$$

と表せる。これを $z-x=1$ と連立して解くと、 $x=\frac{1}{2}, z=\frac{3}{2}$ が得られる。

また、 $t=0$ のときの $R(0, 0, 1)$ と中心 $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$ の距離はもとめる円の半径 r であるから、

$$\begin{aligned}r^2 &= \left(\frac{1}{2} - 0 \right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 1 \right)^2 \\ \therefore r &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

である。

(答) 中心 $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$ 、半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$