

数 学 問 題

はじめに、これを読みなさい。

1. この問題用紙は6ページある。ただし、ページ番号のない白紙はページ数に含まない。
2. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
3. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
4. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークするか、または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しないこと。解答欄は裏面にもある。
5. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
6. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入すること。
7. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
8. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
9. **解答用紙はすべて回収する。**持ち帰らず、必ず提出すること。ただし、この問題冊子は、必ず持ち帰ること。
10. 試験時間は60分である。
11. マークシート記入例

良い例	悪い例
	

〔Ⅰ〕 a, b は 1 以上 50 以下の整数とする。以下の問に答えなさい。空欄内の各文字に当てはまる数字を所定の解答欄にマークしなさい。

- (1) ab が 5 の倍数となる a, b の組は全部で アイウ 通りである。
- (2) $a + b$ が 15 の倍数となる a, b の組は全部で エオカ 通りである。
- (3) $a - b$ が正であり、10 の倍数となる a, b の組は全部で キクケ 通りである。
- (4) $a^3 - b^3$ が正であり、9 の倍数となる a, b の組は全部で コサシ 通りである。
- (5) $a \sin \theta = b$ が、 $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ の範囲で解を持つ a, b の組は全部で スセソ 通りである。

(このページは計算用紙として使用しないでください。)

〔Ⅱ〕 a を正の実数とする。座標平面上に原点 O ，点 $A(a, 0)$ ，点 B ，点 C があり，四角形 $OABC$ は， $\angle OAB$ が 30° で， $OC = 8$ の平行四辺形である。ただし，点 B ，点 C は y 座標が正になるようにとる。また，点 D は直線 AB の上側にあり，三角形 ADB は線分 AB を一辺とする正三角形である。このとき，線分 OD と線分 CA の交点を E とすると， $CE : EA = 5 : 2$ になっている。 $\overrightarrow{OA} = \vec{p}$ ， $\overrightarrow{OC} = \vec{q}$ とおく。

以下の問に答えなさい。空欄内の各文字に当てはまる数字を所定の解答欄にマークしなさい。ただし，分数はすべて既約分数にしなさい。

- (1) $\overrightarrow{OE}$ を， $\vec{p}$ ， $\vec{q}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\boxed{\text{タ}} \vec{p} + \boxed{\text{チ}} \vec{q}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。このとき， $\overrightarrow{OD} = \boxed{\text{テ}} \overrightarrow{OE}$ であり， $a = \boxed{\text{ト}} \sqrt{\boxed{\text{ナ}}}$ となる。

- (2) 三角形 OAB の面積は $\boxed{\text{ニ}} \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ であり，三角形 OAB の外接円の半径は $\boxed{\text{ネ}} \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$ である。また，

$$\cos \angle AOB = -\frac{\sqrt{\boxed{\text{ハヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}} \text{である。}$$

- (3) 点 B と点 D を通り，上に凸な放物線がある。この放物線と直線 BD で囲まれる部分の面積は，平行四辺形 $OABC$ の面積と等しいとする。このとき，この放物線の方程式は，

$$y = -\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}} x^2 + \frac{\sqrt{\boxed{\text{マ}}}}{\boxed{\text{ミ}}} x + \boxed{\text{ム}}$$

である。

(このページは計算用紙として使用しないでください。)

〔Ⅲ〕 以下の問に答えなさい。

設問(1)は、空欄内の各文字に当てはまる数字を所定の解答欄にマークしなさい。

設問(2)は、裏面の欄①に推測した一般項の式を書き、裏面の欄②に証明を書きなさい。

(1) 次のように定められた数列 $\{a_n\}$

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

の一般項を求めると、 $a_n = \boxed{\text{ㄨ}} n - \boxed{\text{ㄜ}}$ となる。

(2) 次のように定められた数列 $\{a_n\}$

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n - 3}{3a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

の一般項を推測し、数学的帰納法を用いて証明しなさい。

(このページは計算用紙として使用しないでください。)