

数 学 問 題

はじめに、これを読むこと。

1. この問題用紙は3ページまでである。ただし、ページ番号のない白紙はページ数に含まない。
2. 問題は、1ページから3ページに書かれている。それ以外のページは、計算用紙として使用してよい。
3. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
4. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
5. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークするか、または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しない。
6. 分数形で解答する場合は、それ以上約分できない形で答えなさい。また、根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。
7. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
8. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入のこと。
9. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
11. **解答用紙はすべて回収する。**持ち帰らず、必ず提出しなさい。ただし、この問題用紙は、必ず持ち帰りなさい。
12. 試験時間は60分である。
13. マーク記入例

良い例	悪い例
	

※ この問題用紙は、必ず持ち帰りなさい。

〔 I 〕 次の各問の に入る数値を下の表から選んでアルファベットをマークせよ。同じアルファベットを選んでもかまわない。

1. $t \geq 0$ について、平面上に点 $P(2t - 1, t + 2)$ と

点 $Q(t^2 + 2t, t^2 + t - 1)$ をとる。このとき、線分 PQ の長さが最小となるのは、 $t =$ (1) のときで、その長さは、 (2) である。

2. $x \geq 0$ について、 $\vec{a} = (x - 1, 2x + 3)$, $\vec{b} = (-2x - 1, x + 3)$ とし、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき、 $\cos \theta = 1$ ならば、 $x =$ (3) であり、 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ならば、 $x =$ (4) である。

3. 全体集合 U の部分集合 A, B, C について、 $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ とする。

ここで、 $D = A \cap B$, $E = B \cap C$, $F = A \cap C$ と置き、

$$D \cup F = F, E \cup D = D, F \cup E = E$$

を満たすとする。このとき、 $\frac{n(A \cap B)}{n(A \cap B \cap C)} =$ (5) である。

さらに、 $n(A) = 11$, $n(B) = 12$, $n(C) = 13$, $n(A \cup B \cup C) = 22$ とすると、 $n(A \cap B \cap C) =$ (6) である。

A. 0	B. 1	C. 2	D. 3
E. 4	F. 5	G. 6	H. 7
I. 8	J. 9	K. 10	L. 11
M. 12	N. 13	O. 14	P. 15
Q. $\frac{1}{2}$	R. $\frac{1}{3}$	S. $\frac{2}{3}$	T. $\frac{1}{4}$
U. $\sqrt{2}$	V. $2\sqrt{2}$	W. $\frac{1}{\sqrt{3}}$	X. $1 + \sqrt{3}$
Y. $\frac{\sqrt{3}}{2}$	Z. $\frac{\sqrt{5}}{2}$		

〔Ⅱ〕 次のア～タに当てはまる 0～9 の数字を解答欄にマークせよ。

$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ について、 $f(\alpha) = \cos^2 \alpha + 2\sqrt{2} \cos \alpha \sin \alpha + 1$ とする。

倍角の公式より、

$$f(\alpha) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \cos(2\alpha) + \sqrt{\boxed{\text{オ}}} \sin(2\alpha)$$

と表すことが出来る。このとき、

$$r \cos \theta = \boxed{\text{ウ}}, \quad r \sin \theta = \boxed{\text{エ}} \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

を満たすように $0 \leq r$ と $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ をとると

$$r = \boxed{\text{カ}}, \quad \cos \theta = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{r}, \quad \sin \theta = \frac{\boxed{\text{エ}} \sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{r}$$

である。この r 、 θ を用いて更に $f(\alpha)$ を変形すれば、

$$f(\alpha) = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \cos(2\alpha - \theta)$$

となる。従って、 $f(\alpha)$ の最大値は、 $\boxed{\text{サ}}$ で、 $f(\alpha)$ の最小値は、 $\boxed{\text{シ}}$ となる。

更に $f(\alpha)$ が最大値となる α について、

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}}, \quad \sin \alpha = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}$$

である。

〔Ⅲ〕 n を自然数とし, $r \geq 0$ を整数とすると, $S_r(n) = 1^r + 2^r + 3^r + \cdots + n^r$ とする。このとき, 次の問に答えよ。

1. (1) $n^2 - \int_{n-1}^n x^2 dx = \frac{1}{3} (a_0 + a_1 n)$ となる a_0, a_1 を求めよ。

(2) $n^3 - \int_{n-1}^n x^3 dx = \frac{1}{4} (b_0 + b_1 n + b_2 n^2)$ となる b_0, b_1, b_2 を求めよ。

2. $r > 0$ のとき,

$$n^r - \int_{n-1}^n x^r dx = \frac{1}{r+1} (a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_{r-1} n^{r-1})$$

となる $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}$ を組合せの総数の記号を用いて表せ。

3. $r > 0$ のとき, 上の問 2 の $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}$ に対して,

$$S_r(n) = \frac{1}{r+1} (a_0 S_0(n) + a_1 S_1(n) + a_2 S_2(n) + \cdots + a_{r-1} S_{r-1}(n) + n^{r+1})$$

となることを示せ。