

数 学 問 題

はじめに、これを読みなさい。

1. この問題用紙は9ページある。ただし、ページ番号のない白紙はページ数に含まない。白紙は計算用紙として使用してよい。
2. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
3. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
4. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークするか、または記入すること。所定欄以外のところには何も記入しないこと。
5. 問題に指定された数より多くマークしないこと。
6. 解答は、鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入のこと。
7. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
8. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
9. 問題は〔Ⅰ〕～〔Ⅴ〕まで5問ある。〔Ⅰ〕, 〔Ⅱ〕は必ず解答すること。〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕, 〔Ⅴ〕はいずれか2問を選択して解答すること。
10. **解答用紙はすべて回収する。**持ち帰らず、必ず提出すること。ただし、この問題用紙は、必ず持ち帰ること。
11. 試験時間は60分である。
12. マーク記入例

良い例	悪い例
	

〔Ⅰ〕 (1)～(5)において、Ⓐ、Ⓑ、Ⓒの値の大小関係を調べ、最大のものと最小のものを、それぞれ所定の解答欄(表面)にマークせよ。

(1) Ⓐ $2^{\frac{1}{2}}$ Ⓑ $3^{\frac{1}{3}}$ Ⓒ $4^{\frac{1}{5}}$

(2) Ⓐ $\sin 50^\circ$ Ⓑ $\cos 50^\circ$ Ⓒ $\tan 50^\circ$

(3) $0 < a < b < a^2$ のとき,
Ⓐ $\log_a b$ Ⓑ $\log_b a$ Ⓒ $\log_b \frac{b}{a}$

(4) Ⓐ $x^2 - x - 10$ を $x - 4$ で割ったときの余り
Ⓑ $2x^2 - 5x - 3$ を $x - 3$ で割ったときの余り
Ⓒ $3x^2 + 7x - 5$ を $x + 3$ で割ったときの余り

(5) xy 平面において、関数 $y = |x| - 1$ のグラフを C_1 とし、関数 $y = x^2$ のグラフを C_2 とする。また、 $x^2 + y^2 = 1$ で表される円を C_3 とする。このとき、

- Ⓐ C_1 と C_2 が共有する点の個数
Ⓑ C_2 と C_3 が共有する点の個数
Ⓒ C_3 と C_1 が共有する点の個数

(このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。)

〔Ⅱ〕 所定の解答欄(表面)に、解答をマークせよ。

問題文中の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ などは解答が1ケタの自然数であることを,
 $\boxed{\text{ウエ}}$, $\boxed{\text{オカ}}$ などは解答が2ケタの自然数であることを表している。

- (1) $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 8$ である $\triangle ABC$ の内接円が辺 BC と接する点を P とすると,

$$7\overrightarrow{AP} = \boxed{\text{ア}}\overrightarrow{AB} + \boxed{\text{イ}}\overrightarrow{AC}$$

が成り立つ。

- (2) 等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ がある。 $a_1 = b_1 = 1$ であり,

かつ, $a_2 + b_2 = a_4 + b_4 = 10$ のとき,

$$a_n = \boxed{\text{ウエ}}n - \boxed{\text{オカ}}$$

$$b_n = \left(-\boxed{\text{キ}}\right)^{n-1}$$

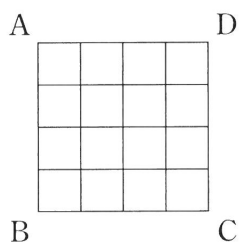
である。

- (3) 不等式 $2\log_{\frac{1}{4}}(x-3) + \log_{\frac{1}{2}}x > -2$ (ただし $x > 3$) の解は,

$$\boxed{\text{ク}} < x < \boxed{\text{ケ}}$$

である。

- (4) 下図のように、正方形 $ABCD$ が、タテ、ヨコ3本ずつの線分によって16等分されている。この図には、正方形が全部で $\boxed{\text{コサ}}$ 個ある。また、正方形ではない長方形は全部で $\boxed{\text{シス}}$ 個ある。



(このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。)

〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕, 〔Ⅴ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は, 高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅲ〕 所定の解答欄(表面)に, (1)と(2)については答のみを, (3)については解答経過と答をともに記せ。

放物線 $C_1: y = -x^2 + Ax + B$ (A, B は実数) と放物線 $C_2: y = x^2 - m^2 + m$ がある。ここで m は実数で, 直線 $y = x$ と放物線 C_1 が接する点の x 座標であるとする。このとき, 次の問に答えよ。

(1) A と B をそれぞれ m の式で表せ。

(2) (1)の結果を用いて, 放物線 C_1 と C_2 のすべての交点の x 座標を求めよ。

(3) 放物線 C_1 と C_2 で囲まれる領域の面積が $-\frac{1}{3}m^3 + \frac{3}{8}m^2$ に等しいときの m の値をすべて求めよ。

(このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。)

〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕, 〔Ⅴ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は, 高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅳ〕 所定の解答欄(裏面)に, (1)と(3)については答のみを, (2)については証明を解答欄に記せ。

n, p はいずれも自然数であるとする。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) n が奇数であるとき, 2^n を3で割ったときの余りを求めよ。
- (2) p が3より大きな素数であるとき, $2^p + p^2$ が3の倍数であることを証明せよ。
- (3) p が素数であり, かつ, $2^p + p^2$ も素数であるような p の値をすべて求めよ。

(このページは計算用紙として使用してもよい。問題は次ページに続く。)

〔Ⅲ〕, 〔Ⅳ〕, 〔Ⅴ〕のうち2問を選択して解答せよ。(なお3問すべてに解答した場合は, 高得点の2問を合計得点に含める。)

〔Ⅴ〕 所定の解答欄(裏面)に, (1)~(5)について答のみを記せ。ただし, 分数はそれ以上約分できない形とすること。

xy 座標平面上において, 点 P を移動する操作を考える。点 P に対して, 1 回の操作について 1 回だけ次の (i)~(iv) のいずれか一つの移動が実行される。

- (i) x 軸方向に 1 だけ移動する。
- (ii) y 軸方向に 1 だけ移動する。
- (iii) x 軸方向に -1 だけ移動する。
- (iv) y 軸方向に -1 だけ移動する。

1 回の操作によって (i)~(iv) のいずれかが実行される確率は, それぞれ $\frac{1}{4}$ である。このとき次の問に答えよ。なお, いずれの問も, 点 P は最初原点 O にあるものとする。

- (1) 3 回の操作後に点 P が座標 $(3, 0)$ に位置する確率を求めよ。
- (2) 6 回の操作後に点 P が座標 $(3, 3)$ に位置する確率を求めよ。
- (3) 5 回の操作後に点 P が座標 $(3, 0)$ に位置する確率を求めよ。
- (4) 8 回の操作後に点 P が座標 $(3, 3)$ に位置する確率を求めよ。
- (5) 8 回の操作後に点 P が初めて座標 $(3, 3)$ に位置する確率を求めよ。

(以上問題終)