

数 学 問 題

注意事項

1. この問題冊子は16ページあります。解答用紙には、「数学①」と「数学②」の2枚あり、「数学②」には表と裏があります。
2. あなたの受験番号は、2枚の解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認下さい。
3. 監督者の指示にしたがい、2枚の解答用紙の所定の欄に氏名を記入下さい。
4. 問題〔Ⅰ〕、〔Ⅲ〕の解答は、解答用紙「数学①」の所定の欄に記入下さい。
5. 問題〔Ⅱ〕の解答は、解答用紙「数学①」の所定の欄にマーク下さい。
6. 問題〔Ⅳ〕、〔Ⅴ〕は、解答用紙「数学②」の所定の欄に解答下さい。
7. 1問につき2つ以上マークしないこと。2つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入下さい。
9. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また、所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らず、必ず提出下さい。
12. この問題冊子は必ず持ち帰り下さい。
13. 試験時間は120分です。
14. マークシート記入例

良い例	悪い例
	

〔Ⅰ〕 次の空欄 あ から う に当てはまるもの（数・式など）を解答用

紙の所定の欄に記入せよ。ただし $\log$ は自然対数, また e はその底である。

(1) 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_0^{\pi} t f(t) dt + \cos x$$

を満たすとき $f(x) =$ あ $+ \cos x$ である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

(2) 関数

$$f(x) = \int_x^{x+\log 2} t e^{-t} dt$$

は $x =$ い において最大値 う をとる。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅱ〕 次の空欄 ア と イ に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び、その記号を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし $\log$ は自然対数である。また空欄 ウ から オ に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし、ウエオ は 3 桁の数を表す。

(1) a は $0 < a < \frac{\pi}{2}$ をみたす定数, n は自然数とするとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \log \left(\cos \frac{a}{n} \right) = \text{ア}$$

である。

アの解答群

- | | | | | |
|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ a^2 | ④ $-a^2$ | ⑤ $\frac{1}{a^2}$ |
| ⑥ $-\frac{1}{a^2}$ | ⑦ $\frac{a^2}{2}$ | ⑧ $-\frac{a^2}{2}$ | ⑨ $\frac{1}{2a^2}$ | ⑩ $-\frac{1}{2a^2}$ |

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

(2) p は 1 より大きい定数とする。任意の実数 A, B に対して

$$p A^2 + q B^2 \geq (A + B)^2$$

が成り立つような最小の正の定数 q は イ である。

イの解答群

① $p - 1$

① p

② $p + 1$

③ $\frac{2}{p - 1}$

④ $\frac{4}{p}$

⑤ $\frac{6}{p + 1}$

⑥ $\frac{4(p - 1)}{p}$

⑦ $\frac{6(p - 1)}{p + 1}$

⑧ $\frac{p}{p - 1}$

⑨ $\frac{3p}{p + 1}$

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

(3) 3種類の数字1, 2, 3を重複を許して並べて, 6桁の整数をつくる時,

1, 2, 3のいずれもが1回以上使われているような整数は全部で ウエオ

個ある。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅲ〕 次の空欄 , , に当てはまるもの（数・式など）を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

正四面体の頂点を A, B, C, D とする。点 P は次の規則 (a), (b) にしたがって、1 秒ごとに頂点を移動する。

(a) 点 P は、時刻 0 では頂点 A に位置する。

(b) 点 P が、ある頂点 X (ただし X は A, B, C, D のいずれか) にいるとき、点 P は 1 秒後には X 以外の 3 つの頂点のいずれかに、等しい確率で移っている。

以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 0 から 4 秒後に点 P が頂点 A にいる確率は である。

(2) 時刻 0 から n 秒後に点 P が頂点 A にいる確率を p_n 、また n 秒後に点 P が頂点 B にいる確率を q_n とする。 p_n および $p_n - q_n$ を n の式で表すと

$p_n =$, $p_n - q_n =$ である。ただし、 n は自然数とする。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅳ〕 (1) 2 以上の自然数 n に対して,

$$a_n = n(17n - 20)(19n - 20)$$

と定める。すべての a_n ($n \geq 2$) に共通な約数である素数 p を全部求めよ。

(2) n と $17n - 20$ と $19n - 20$ がいずれも素数となるような 2 以上の自然数 n を全部求めよ。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔V〕 座標空間において、点 $P(0, 0, 2)$, $A(1, 2, 0)$, $B(1, -2, 0)$,

球面 $S : (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ および xy 平面上の放物線

$C : 4x - y^2 = 0$ を考える。また、点 $Q\left(\frac{t^2}{4}, t, 0\right)$ は放物線 C 上を動くとする。ただし t は実数である。以下の問いに答えよ。

(1) t が $-2 \leq t \leq 2$ を動くとき、線分 PQ の通過する部分を M とする。

図形 M 、平面 $z = 0$ および三角形 PAB で囲まれた立体を K とする。

(i) s は $0 \leq s \leq 2$ を満たす定数とする。 K を平面 $z = s$ で切ったときの切り口の面積を s の式で表せ。

(ii) K の体積を求めよ。

(2) 実数 t に対し、線分 PQ と球面 S は共有点をただ1つもつことを示し、その共有点の座標を t の式で表せ。

(3) (2)における線分 PQ と球面 S との共有点を R とする。点 Q が放物線 C 上を動くとき、点 R の軌跡は平面 $z - x = 1$ 上のある円に含まれる。この円の中心の座標と半径を求めよ。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)