

【1】

【解答】

(1)	②	ウ	エ	オ		
		Ⓑ	Ⓓ	Ⓔ		
(2)	①	ア	イ	ウ	エ	オ
		Ⓑ	Ⓔ	Ⓕ	Ⓖ	Ⓗ
	②	カ	キ			
		Ⓔ	Ⓖ			
(3)	①	ア	イ			
		Ⓐ	Ⓒ			
(4)	①	ア	イ	ウ		
		Ⓖ	Ⓔ	Ⓒ		
(5)	①	ア	イ			
		Ⓓ	Ⓘ			
	②	ウ	エ	オ		
		Ⓖ	Ⓓ	Ⓒ		

【解説】

(1)①

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 8$ の交点の x 座標は

$$x^2 = 2x + 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

【解説】

(1)①

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+8$ の交点の x 座標は、
$$\begin{aligned}x^2 &= 2x+8 \\ \Leftrightarrow x^2-2x-8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)(x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 4, -2\end{aligned}$$

より、 $x=4, -2$ である。よって、領域 A の図は下図の斜線部のようになる。



したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned}\int_{-2}^4 \{(2x+8)-x^2\} dx &= \int_{-2}^4 \{-(x-4)(x+2)\} dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot \{4-(-2)\}^3 \\ &= 36\end{aligned}$$

より、36 である。

②

領域 A の面積を S とし、直線 l によって分けられた領域 A のうち、直線 l より x 座標が小さい方の面積を S_1 とし、直線 l より x 座標が大きい方の面積を S_2 とする。また、直線 l と直線 $y=2x+8$ の交点の x 座標を a とおく。 $a=0$ のときは、①の図より、 $S_1 < S_2$ である。また、 $a=4$ のときは、 $y=2x+8$ に $x=4$ を代入したとき $y=16$ となることから、直線 l は点 $(4, 16)$ を通る。よって、直線 l の方程式は $y=4x$ である。したがって、

$$\begin{aligned}S_2 &= \int_0^4 (4x-x^2) dx \\ &= \int_0^4 \{-x(x-4)\} dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot (4-0)^3 \\ &= \frac{32}{3} \\ &< 18 \\ &= \frac{1}{2} S\end{aligned}$$

より、 $S_1 > S_2$ である。また、 a の値が増加すると、 S_1 の値は増加し、 S_2 の値は減少する。したがって、 $S_1 = S_2$ のとき a は、 $0 < a < 4$ を満たす必要がある。このとき、図は下図のようになる。



ここで、直線 l と直線 $y=2x+8$ の交点を B 、点 $(0, 8)$ を C 、点 $(-2, 4)$ を D とすると、 S_1 は線分 OD と放物線 $y=x^2$ に囲まれた面積と $\triangle OCB$ の面積、 $\triangle OCD$ の面積の和である。線分 OD の方程式は $y=-2x$ であるから、

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_{-2}^0 \{-2x-x^2\} dx + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \\ &= \int_{-2}^0 \{-x(x+2)\} dx + 4a + 8 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \{0-(-2)\}^3 + 4a + 8 \\ &= \frac{28}{3} + 4a\end{aligned}$$

である。したがって、 a の満たすべき条件は、

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2} S \\ \Leftrightarrow \frac{28}{3} + 4a &= 18 \\ \therefore a &= \frac{13}{6}\end{aligned}$$

である。したがって、求める値は $\frac{13}{6}$ である。

(2)①

$\sin \theta + \cos \theta = x$ とおくと、

$$\begin{aligned}x^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

であるから、 $\sin \theta \cos \theta = \frac{x^2-1}{2}$ である。したがって、

$$\begin{aligned}y &= 2(\sin \theta + \cos \theta)(61 - 25 \sin \theta \cos \theta) \\ &= 2x \left(61 - 25 \cdot \frac{x^2-1}{2} \right) \\ &= 147x - 25x^3\end{aligned}$$

と表せる。

②

$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ である。 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ を動くとき、 $\theta + \frac{\pi}{4}$ は $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ を動く。よって、 $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ は $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$ を動くから、 x は $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ を動く。ここで、 x が $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ を動くときの $y=147x-25x^3$ の増減について考える。 $y=147x-25x^3$ を x について微分すると、

$$\begin{aligned}y' &= 147 - 75x^2 \\ &= 3(7-5x)(7+5x)\end{aligned}$$

である。また、 $\frac{7}{5}, \sqrt{2}$ はいずれも正の数で、 $\left(\frac{7}{5} \right)^2 = \frac{49}{25} < 2 = (\sqrt{2})^2$ であるから、 $\frac{7}{5} < \sqrt{2}$ である。

したがって、 $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ での増減表は以下のようになる。

x	1	...	$\frac{7}{5}$	...	$\sqrt{2}$
y'		+	0	-	
y		↗	極大	↘	

したがって、 $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ を x が動くとき、 y が最大になるのは $x = \frac{7}{5}$ のときである。よって、

y を最大にする θ は $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ である。また、 $\sin \theta \cos \theta = \frac{x^2-1}{2}$ より、

$$\begin{aligned}\sin \theta \cos \theta &= \frac{\left(\frac{7}{5} \right)^2 - 1}{2} \\ &= \frac{12}{25}\end{aligned}$$

である。よって、解と係数の関係より、 $\sin \theta, \cos \theta$ は t の2次方程式 $t^2 - \frac{7}{5}t + \frac{12}{25} = 0$ の解である。

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のときは $\sin \theta \leq \cos \theta$ であるから、 $\cos \theta$ の値は t の2次方程式 $t^2 - \frac{7}{5}t + \frac{12}{25} = 0$ の2個の解のうち、大きい方である。解を求めると

$$\begin{aligned}t^2 - \frac{7}{5}t + \frac{12}{25} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(t - \frac{4}{5} \right) \left(t - \frac{3}{5} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\end{aligned}$$

であるから、 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ である。

(3)

$f(x) = x^3 - kx^2 - k^2x + 4k$ とする。 k の満たすべき条件は $x \geq 0$ の範囲で常に $f(x) \geq 0$ となることである。以下、 k と0の大小に着目して場合分けを行う。

[1] $k < 0$ のとき

$f(0) = 4k < 0$ となり、条件を満たさないから不適である。

[2] $k = 0$ のとき

$f(x) = x^3$ となり、 $x \geq 0$ ならば $x^3 \geq 0$ であるから、条件を満たす。

[3] $k > 0$ のとき

$f(x)$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 2kx - k^2 \\ &= (3x+k)(x-k)\end{aligned}$$

である。よって、 $x \geq 0$ での $f(x)$ の増減表は以下の通りになる。

x	0	...	k	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	極小	↗

上の増減表より、 k の満たすべき条件は、

$$\begin{aligned}f(k) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -k^3 + 4k &\geq 0 \\ \Leftrightarrow k(k+2)(k-2) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 0 < k \leq 2 \quad (\because k > 0)\end{aligned}$$

である。

以上、[1], [2], [3]より、求める k の値の範囲は、 $0 \leq k \leq 2$ である。

(4)

部分分数分解を用いて変形し、計算をすると

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10} a_n &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{4n^2-1} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{21} \right) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{20}{21} \\ &= \frac{5}{42}\end{aligned}$$

となり、求める和は $\frac{5}{42}$ である。

(5)①

コインの表と裏の出方は同様に確からしく、その確率はどちらも $\frac{1}{2}$ である。求める確率は、コインを4回投げた時に、表と裏が2回ずつ出る確率であるから、

$${}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{8}$$

である。

②

コインを5回投げた時に表が出る回数を m 回とすると、裏が出る回数は $5-m$ 回である。コインを5回投げたあとに赤箱に6つのあめが入っているには、裏が出る回数が、表が出る回数より3回以上多い必要があるから、 m は

$$\begin{aligned}(5-m)-m &\geq 3 \\ \Leftrightarrow m &\leq 1\end{aligned}$$

を満たす必要がある。以下、 m の値に着目して場合分けを行う。

[1] $m = 0$ のとき

コインを5回投げたあとに赤箱に6つのあめが入っている。裏が5回出る確率は、

$$\left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{32}$$

である。

[2] $m = 1$ のとき

4回目まで裏が出て5回目に表が出るとき、コインを5回投げたあとに赤箱に5つ、白箱に1つのあめが入っており、そのほかの場合はコインを5回投げたあとに赤箱に6つのあめが入っている。よってコインを5回投げたあとに赤箱に6つのあめが入っているのは、裏が4回、表が1回出て、かつ表が出るのが5回目以外となるときである。そのときの確率は、

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{8}$$

である。

以上、[1], [2]より、求める確率は、 $\frac{1}{32} + \frac{1}{8} = \frac{5}{32}$ である。

〔Ⅱ〕

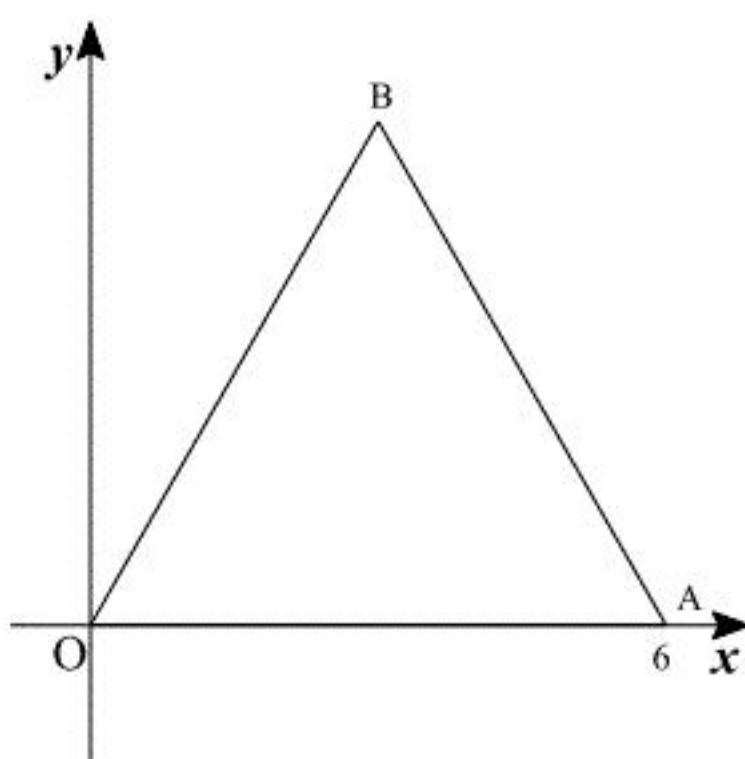
〔解答〕

(1)	B	$B(3, 3\sqrt{3}, 0)$	C	$C(3, \sqrt{3}, 2\sqrt{6})$
(2)	H	$H\left(4, \frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$		

〔解説〕

(1)

$\triangle OAB$ の重心を点 G とする。点 C から $\triangle OAB$ に下した垂線の足は、 $\triangle OAB$ の重心と一致するから、直線 CG は xy 平面と直交する。点 C の y 座標は正であるから、点 G の y 座標も正である。したがって、点 O, A の y 座標は 0 であるから、点 B の y 座標は正である。 $\triangle OAB$ の図を xy 平面上に表すと以下のようなになる。



ここで、線分 OA の中点を M とすると、直線 BM は線分 OA 、つまり x 軸と直交する。点 M の座標は、 $\left(\frac{6+0}{2}, 0, 0\right) = (3, 0, 0)$ であるから、点 B の x 座標は 3 である。 $OB=6$ で、点 B の y 座標は正であるから、点 B の y 座標を y とすると、 y の満たすべき条件は、

$$3^2 + y^2 = 6^2$$

$$\Leftrightarrow y = 3\sqrt{3} \quad (\because y > 0)$$

である。よって、点 B の座標は $(3, 3\sqrt{3}, 0)$ である。ここで、 $\triangle OAB$ の重心 G の座標は、

$$\left(\frac{0+6+3}{3}, \frac{0+0+3\sqrt{3}}{3}, 0\right) = (3, \sqrt{3}, 0)$$

であるが、直線 CG は xy 平面と直交するから、点 C の座標は、 $(3, \sqrt{3}, z) \quad (z > 0)$ とおける。

$OC=6$ であるから、 z の満たすべき条件は、

$$3^2 + (\sqrt{3})^2 + z^2 = 6^2$$

$$\Leftrightarrow z = 2\sqrt{6} \quad (\because z > 0)$$

である。よって、点 C の座標は $(3, \sqrt{3}, 2\sqrt{6})$ である。

(2)

点 H は $\triangle ABC$ の重心であるから、点 H の座標は、

$$\left(\frac{6+3+3}{3}, \frac{0+3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3}, \frac{0+0+2\sqrt{6}}{3}\right) = \left(4, \frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

である。

【Ⅲ】

〔解答〕

$$\begin{array}{lcl} (1) & a = & \boxed{2} & b = & \boxed{14} \\ (2) & c = & \boxed{\frac{1}{4}p^2 - 12p + 21} & d = & \boxed{-\frac{1}{2}p^2} \\ (3) & p = & \boxed{8} & & \end{array}$$

〔解説〕

(1)

$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{ の両辺を } x \text{ で微分すると, } -\frac{1}{2}p^2$$

$$y' = x$$

である。放物線 C_1 と C_2 の両方に接する直線の放物線 C_1 との接点の x 座標を t とする。接点の

座標は $\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ となり、接線の方程式は、

$$y = t(x - t) + \frac{1}{2}t^2$$

$$\Leftrightarrow y = tx - \frac{1}{2}t^2$$

である。 t の満たすべき条件は、直線 $y = tx - \frac{1}{2}t^2$ が放物線 C_2 に接することである。

$$-(x - 12)^2 + 21 = tx - \frac{1}{2}t^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (t - 24)x + \left(123 - \frac{1}{2}t^2\right) = 0$$

である。 t の満たすべき条件は、この方程式が重解を持つことである。よって、この方程式の判別式を D とすると、

$$D = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 24)^2 - 4\left(123 - \frac{1}{2}t^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 48t + 84 = 0$$

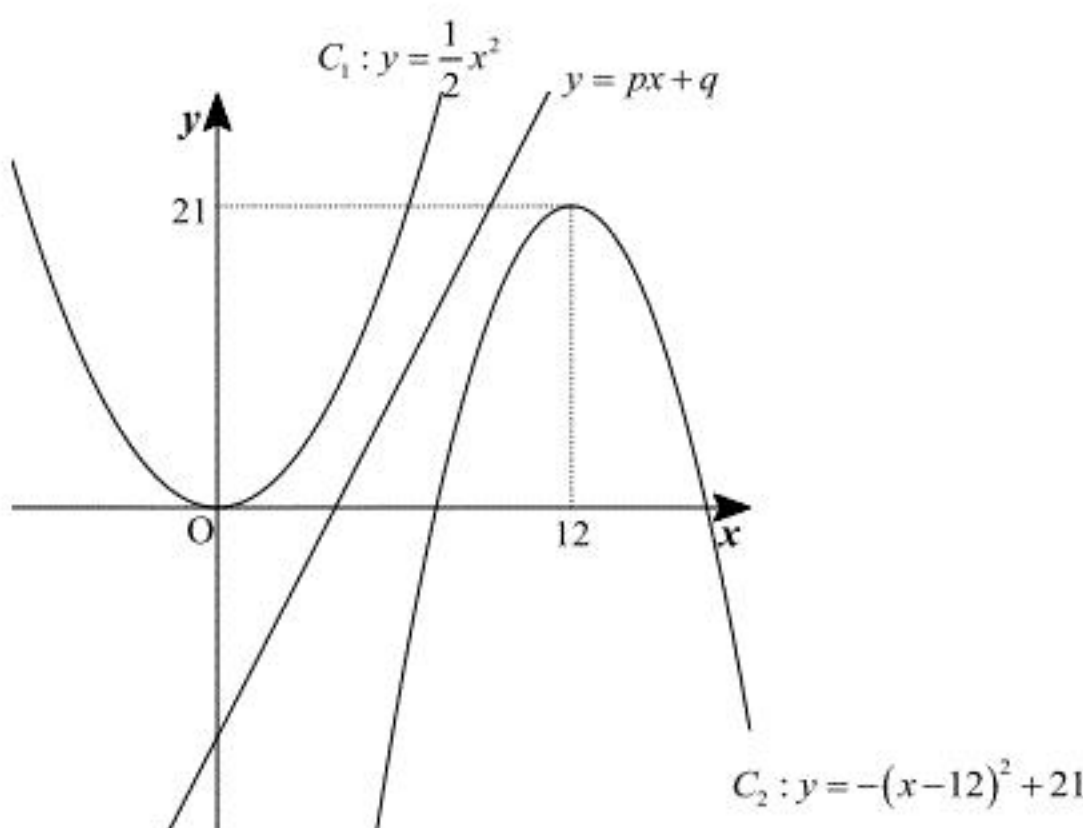
$$\Leftrightarrow (t - 2)(t - 14) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2, 14$$

である。したがって、 $a = 2, b = 14$ である。

(2)

放物線 C_1, C_2 と直線の図は以下になる。



上図より、 c, d の値はそれぞれ直線 $y = px + q$ が C_2, C_1 と接するときの q の値である。直線 $y = px + q$ が C_1 と接するとき、2 次方程式

$$\frac{1}{2}x^2 = px + q$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2px - 2q = 0$$

は重解を持つ。この方程式の判別式を D_1 とすると、直線 $y = px + q$ が C_1 と接するための q が満たすべき条件は、

$$\frac{D_1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 2q = 0$$

$$\Leftrightarrow q = -\frac{1}{2}p^2$$

である。したがって、 $d = -\frac{1}{2}p^2$ である。また、直線 $y = px + q$ が C_2 と接するとき、2 次方程式

$$-(x - 12)^2 + 21 = px + q$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (p - 24)x + (q + 123) = 0$$

は重解を持つ。この方程式の判別式を D_2 とすると、直線 $y = px + q$ が C_2 と接するための q が満たすべき条件は、

$$D_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (p - 24)^2 - 4(q + 123) = 0$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{1}{4}p^2 - 12p + 21$$

である。したがって、 $c = \frac{1}{4}p^2 - 12p + 21$ である。

(3)

$d - c$ を計算し、平方完成をすると

$$d - c = -\frac{1}{2}p^2 - \left(\frac{1}{4}p^2 - 12p + 21\right)$$

$$= -\frac{3}{4}p^2 + 12p - 21$$

$$= -\frac{3}{4}(p - 8)^2 + 27$$

となる。よって(1)より、 p が $2 < p < 14$ を動くとき、 $d - c$ が最大になるのは $p = 8$ のときである。