

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ						
	9	1	6	1						
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
	5	5	4	7	2	7	2	0	2	7

【解説】

(1)

xyz が 5 の倍数にならない確率は x, y, z がいずれも 5 でない確率であるから、

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

である。よって、 xyz が 5 の倍数になる確率は x, y, z のいずれかが 5 である確率であるから、

$$1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

である。また、 x, y, z がすべて 5 以下である確率は、

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

である。 x, y, z がすべて 4 以下である確率は、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

である。 x, y, z のうちの最大数が 5 となる場合は、 x, y, z がすべて 5 以下である場合から x, y, z がすべて 4 以下である場合を除いたものであるから、 x, y, z のうちの最大数が 5 となる確率は、

$$\frac{125}{216} - \frac{8}{27} = \frac{61}{216}$$

である。

(2)

$x < y < z$ となる場合の数は、1 から 6 の 6 つの数字から重複を許さずに 3 つ取り出すときの 3 つの数の組み合わせの個数に等しいから、

$${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ (通り)}$$

である。よって、 $x < y < z$ となる確率は、

$$\frac{20}{6^3} = \frac{5}{54}$$

である。また、 $x \geq y \geq z$ となる場合の数は、1 から 6 の 6 つの数字から重複を許して 3 つ取り出すときの 3 つの数の組み合わせの個数に等しい。このような場合の数は、○ 3 つと仕切り | 5 つを並び替える場合の数と等しい。例えば、○ || ○ | ○ || のような並べ方であれば $(x, y, z) = (4, 3, 1)$ と対応する。したがって、この場合の数は、

$${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ (通り)}$$

である。よって、 $x \geq y \geq z$ となる確率は、

$$\frac{56}{6^3} = \frac{7}{27}$$

である。また、

$$\begin{aligned} 2^x \times 2^y \times 2^z &> 500 \\ \Leftrightarrow 2^{x+y+z} &> 500 \\ \Leftrightarrow x+y+z &\geq 9 \end{aligned}$$

である。 $x+y+z \leq 8$ となる場合の数は、 $a = x-1, b = y-1, c = z-1$ とすることで、

$$0 \leq a, b, c \leq 5, a+b+c \leq 5$$

となる (a, b, c) の組み合わせの個数に等しいと分かる。このような場合の数は、 $0 \leq d \leq 5$ を満たす整数 d を用いて $a+b+c = 5-d$ とすれば、

$$0 \leq a, b, c, d \leq 5, a+b+c+d = 5$$

となる (a, b, c, d) の組み合わせの個数に等しい。このような場合の数は ○ 5 つと仕切り | 3 つを並び替える場合の数に等しい。例えば、○ || ○ ○ | ○ ○ のような並べ方であれば $(a, b, c, d) = (1, 0, 2, 2)$ と対応する。したがって、この場合の数は、

$${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ (通り)}$$

である。よって、 $x+y+z \leq 8$ となる確率は、

$$\frac{56}{6^3} = \frac{7}{27}$$

である。よって、 $x+y+z \geq 9$ すなわち $2^x \times 2^y \times 2^z > 500$ となる確率は、

$$1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

である。

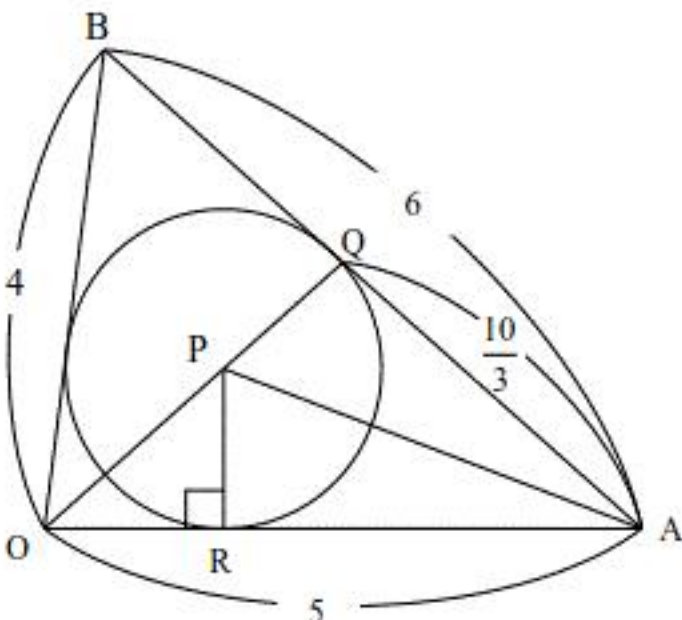
〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ソ	タ	チ	ツ						
	1	8	3	4						
(2)	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ
	4	5	9	4	5	1	5	3	1	0

〔解説〕

- (1) 三角形 OAB は以下になる。



三角形 OAB についての余弦定理より、

$$\cos \angle AOB = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{8}$$

である。ここで、線分 OQ は三角形 OAB の内心 P を通るから、 $\angle AOB$ の二等分線である。したがって、三角関数の半角の公式より、

$$\begin{aligned} \cos^2 \angle AOP &= \cos^2 \frac{1}{2} \angle AOB \\ &= \frac{1 + \cos \angle AOB}{2} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{8}}{2} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\angle AOB$ は $0^\circ < \angle AOB < 180^\circ$ をみたすから、 $\angle AOP$ は $0^\circ < \angle AOP < 90^\circ$ をみたす。したがって、 $\cos \angle AOP$ は正である。よって、

$$\cos \angle AOP = \frac{3}{4}$$

である。ここで、点 R は三角形 OAB の内接円と辺 OA の接点であるから、 $\angle ORP = 90^\circ$ である。したがって、 $\angle OPR = 90^\circ - \angle AOP$ である。よって、

$$\begin{aligned} \sin \angle OPR &= \sin (90^\circ - \angle AOP) \\ &= \cos \angle AOP \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。

- (2) 線分 OQ は $\angle AOB$ の二等分線であるから、 $AQ : QB = OA : OB = 5 : 4$ である。よって、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{4\vec{a} + 5\vec{b}}{5 + 4} = \frac{4\vec{a} + 5\vec{b}}{9}$$

である。また、 $AQ = \frac{5}{9} \cdot 6 = \frac{10}{3}$ である。さらに、線分 AP は $\angle OAQ$ の二等分線であるから、

$OP : PQ = OA : AQ = 5 : \frac{10}{3} = 3 : 2$ である。したがって、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{5} \overrightarrow{OQ} = \frac{4\vec{a} + 5\vec{b}}{15}$$

である。また、 $\angle ORP = 90^\circ$ であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OR}| &= |\overrightarrow{OP}| \cos \angle POA \\ &= |\overrightarrow{OP}| \cdot \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a}}{|\overrightarrow{OP}| |\vec{a}|} \\ &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB \\ &= 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= |\overrightarrow{OR}| \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \\ &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \\ &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \\ &= \frac{\frac{1}{15} (4\vec{a} + 5\vec{b}) \cdot \vec{a}}{25} \vec{a} \\ &= \frac{4|\vec{a}|^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b}}{15 \cdot 25} \vec{a} \\ &= \frac{4 \cdot 25 + 5 \cdot \frac{5}{2}}{15 \cdot 25} \vec{a} \\ &= \frac{3}{10} \vec{a} \end{aligned}$$

である。

【Ⅲ】

〔解答〕

(1)	$\square{\small{\wedge}}$	$\square{\small{\text{ホ}}}$	$\square{\small{\text{マ}}}$
	5	0	9
(2)	$\square{\small{\equiv}}$	$\square{\small{\triangle}}$	$\square{\small{\times}}$
	3	3	6
(3)	$\square{\small{\text{モ}}}$	$\square{\small{\text{ヤ}}}$	
	9	5	

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}x+2y&=5, \, x>0, \, y>0 \\ \Leftrightarrow x&=-2y+5, \, -2y+5>0, \, y>0 \\ \Leftrightarrow x&=-2y+5, \, 0<y<\frac{5}{2}\end{aligned}$$

であるから、求める値は

$$\begin{aligned}2(-2y+5)^2+y^2&=9y^2-40y+50 \\ &=9\left(y-\frac{20}{9}\right)^2+\frac{50}{9}\end{aligned}$$

の $0<y<\frac{5}{2}$ での最小値である。 $0<\frac{20}{9}<\frac{5}{2}$ であるから、求める値は $\frac{50}{9}$ である。

(2)

求める値は

$$\begin{aligned}\log_{10}x+2\log_{10}y&=\log_{10}xy^2 \\ &=\log_{10}\{(-2y+5)y^2\} \\ &=\log_{10}(-2y^3+5y^2)\end{aligned}$$

の $0<y<\frac{5}{2}$ での最大値である。ここで、 $-2y^3+5y^2$ の $0<y<\frac{5}{2}$ での最大値を求める。

$f(y)=-2y^3+5y^2$ とすると、

$$\begin{aligned}f'(y)&=-6y^2+10y \\ &=-6y\left(y-\frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$

であるから、 $0<y<\frac{5}{2}$ の増減表は以下ようになる。

y	0	…	$\frac{5}{3}$	…	$\frac{5}{2}$
$f'(y)$		+	0	−	
$f(y)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって、 $-2y^3+5y^2$ の $0<y<\frac{5}{2}$ での最大値は $f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{125}{27}$ である。また、 $\log_{10}(-2y^3+5y^2)$ の底

は $10>1$ であるから、 $-2y^3+5y^2$ が最大になるときに $\log_{10}(-2y^3+5y^2)$ が最大となる。したが

って、求める値は、

$$\begin{aligned}\log_{10}\frac{125}{27}&=\log_{10}\left(\frac{5}{3}\right)^3 \\ &=3(\log_{10}5-\log_{10}3) \\ &=3(1-\log_{10}2-\log_{10}3) \\ &=3-3\log_{10}6\end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned}5\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)&=(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right) \\ &=5+2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$

である。ここで、 $\frac{x}{y}, \frac{y}{x}>0$ であるから、相加相乗平均の関係を使うと、

$$5+2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq 5+4\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=9$$

である。等号成立条件は

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}&=\frac{y}{x} \\ \Leftrightarrow x^2&=y^2 \\ \Leftrightarrow x&=y \, (\because x, y>0)\end{aligned}$$

であるが、

$$\begin{aligned}\begin{cases} x+2y=5 \\ x=y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y+2y=5 \\ x=y \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y)=\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$

であり、これは $x, y>0$ をみたすから、等号は成立する。よって、 $5\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)$ の最小値は9であ

るから、求める値は $\frac{9}{5}$ である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1)

$$s = \frac{q\alpha + p\beta}{p+q}, t = \frac{q\sqrt{\alpha} + p\sqrt{\beta}}{p+q}$$

(2)

$$\begin{aligned} s - t^2 &= \frac{q\alpha + p\beta}{p+q} - \left(\frac{q\sqrt{\alpha} + p\sqrt{\beta}}{p+q} \right)^2 \\ &= \frac{(q\alpha + p\beta)(p+q) - (q^2\alpha + 2pq\sqrt{\alpha\beta} + p^2\beta)}{(p+q)^2} \\ &= \frac{\{q^2\alpha + pq(\alpha + \beta) + p^2\beta\} - (q^2\alpha + 2pq\sqrt{\alpha\beta} + p^2\beta)}{(p+q)^2} \\ &= \frac{pq(\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta})}{(p+q)^2} \\ &= \frac{pq(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2}{(p+q)^2} \\ &> 0 \quad (\because \alpha \neq \beta) \end{aligned}$$

である。よって、 $s > t^2$ である。また、 $\alpha, \beta, p, q > 0$ であるから、 $t = \frac{q\sqrt{\alpha} + p\sqrt{\beta}}{p+q} > 0$ である。

以上より、 $\sqrt{s} > t$ である。

(証明終)

〔解説〕

(1)

点 (s, t) は線分 AB を $p:q$ に内分するから、

$$(s, t) = \left(\frac{q\alpha + p\beta}{p+q}, \frac{q\sqrt{\alpha} + p\sqrt{\beta}}{p+q} \right)$$

である。よって、 $s = \frac{q\alpha + p\beta}{p+q}, t = \frac{q\sqrt{\alpha} + p\sqrt{\beta}}{p+q}$ である。