

【Ⅰ】

〔解答〕

(1)	C
(2)	D
(3)	Y
(4)	M
(5)	E
(6)	T

〔解説〕

1. 以下、法を13とする合同式を考える。

$$2^6 = 64 = 13 \cdot 5 - 1$$
$$\therefore 2^6 \equiv -1$$
$$\therefore 2^{12} \equiv 1$$
$$\therefore 2^{13} \equiv 2$$

であるので、 2^{13} を13で割った余りは2となる。また、

$$3^3 = 27 = 13 \cdot 2 + 1$$
$$\therefore 3^3 \equiv 1$$
$$\therefore 3^{12} \equiv 1$$
$$\therefore 3^{13} \equiv 3$$

であるので、 3^{13} を13で割った余り3となる。

2.

$\triangle AOB$ の面積は $\frac{1}{2}\sqrt{|\overline{OA}|^2|\overline{OB}|^2-(\overline{OA}\cdot\overline{OB})^2}$ で与えられること、 $0^\circ\leq\theta\leq45^\circ$ より、 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\cos\theta\leq1$ 、 $0\leq\sin\theta\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\overline{OA}|^2|\overline{OB}|^2-(\overline{OA}\cdot\overline{OB})^2} &= \frac{\sqrt{13}}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot2-(2\cos\theta\sin\theta)^2} &= \frac{\sqrt{13}}{4} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2\theta\sin^2\theta} &= \sqrt{\frac{13}{16}} \\ \Leftrightarrow \cos^4\theta-\cos^2\theta+\frac{3}{16} &= 0 \left(\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1\right) \\ \Leftrightarrow \left(\cos^2\theta-\frac{3}{4}\right)\left(\cos^2\theta-\frac{1}{4}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \therefore \cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore \sin\theta &= \frac{1}{2} \left(\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1\right)\end{aligned}$$

となる。

3.

$f(x)=x^3-6x^2+9x$ とおく。 $f'(x)=3x^2-12x+9$ より $f'(1)=0$ である。また、 $f(1)=4$ である。よって、 $y=f(x)$ の $x=1$ における接線の方程式は、 $y=4$ とわかる。 $y=f(x)$ と $y=4$ を連立して、 y を消去すると、

$$\begin{aligned}f(x) &= 4 \\ \Leftrightarrow x^3-6x^2+9x-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= 1, 4\end{aligned}$$

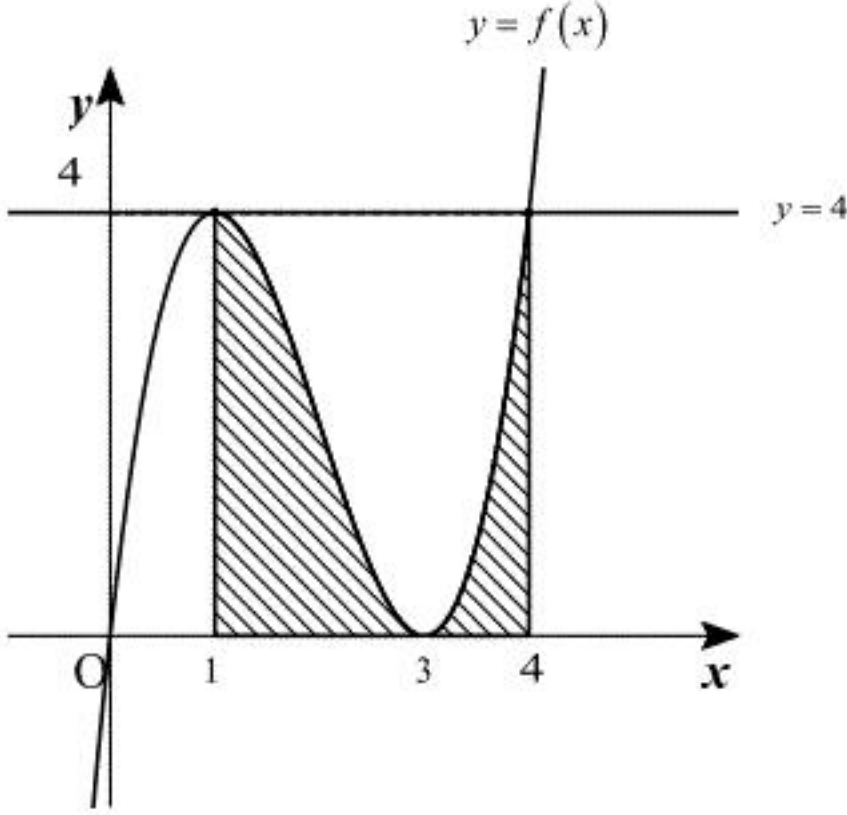
となり、 $y=f(x)$ と $y=4$ は、 $x=1$ 以外では $x=4$ で交点をもつ。

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2-12x+9 \\ &= 3(x-1)(x-3)\end{aligned}$$

より、 $f(x)$ の増減は下表に従う。

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

上表より $y=f(x)$ と $y=4$ のグラフは下図のようになる。



よって、 $1\leq x\leq4$ の範囲で、 $y=f(x)$ と x 軸で挟まれた領域の面積 S は、

$$\begin{aligned}S &= \int_1^4 (x^3-6x^2+9x) dx \\ &= \int_1^4 x(x-3)^2 dx \\ &= \int_1^4 \left\{ (x-3)^3 + 3(x-3)^2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(x-3)^4 + (x-3)^3 \right]_1^4 \\ &= \left(\frac{1}{4} + 1 \right) - \left(\frac{16}{4} - 8 \right) \\ &= \frac{21}{4}\end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	2	サ	2	ナ	3
イ	9	シ	2		
ウ	2	ス	1		
エ	9	セ	0		
オ	2	ソ	3		
カ	3	タ	1		
キ	2	チ	1		
ク	3	ツ	2		
ケ	2	テ	1		
コ	3	ト	0		

〔解説〕

$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a-12x$ の共有点の x 座標は,

$$\begin{aligned} f(x) &= a-12x \\ \Leftrightarrow 3x^4-8x^3-6x^2+24x-10 &= a \end{aligned}$$

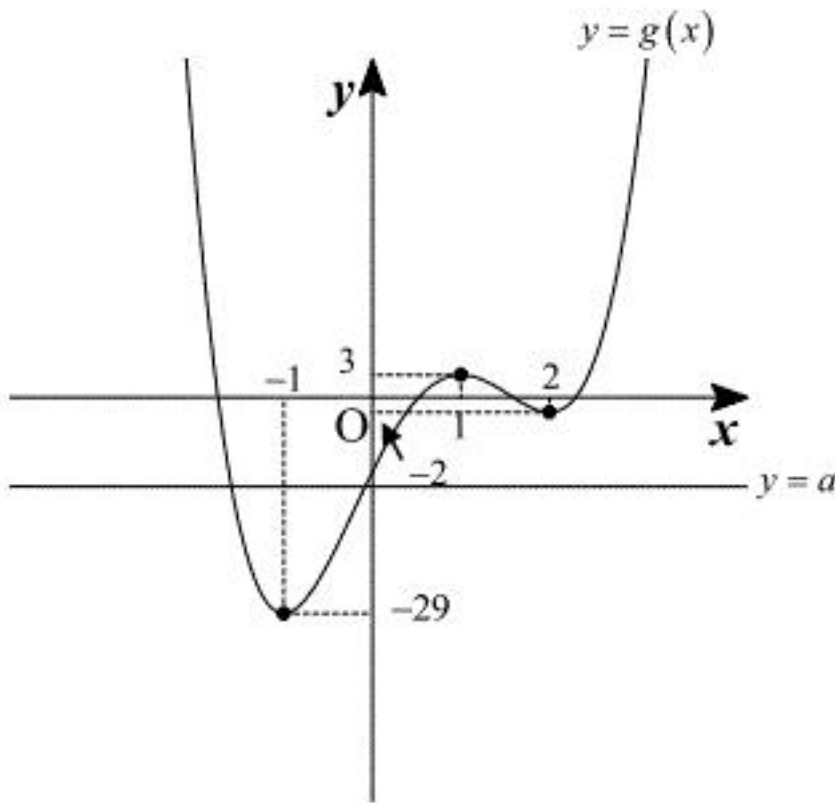
の x の実数解で与えられる。ここで、 $g(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-10$ とおく。 $y=g(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を考えればよい。

$$\begin{aligned} g'(x) &= 12x^3-24x^2-12x+24 \\ &= 12(x^3-2x^2-x+2) \\ &= 12(x+1)(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

であるので、 $g(x)$ の増減は下表のようになる。

x	...	-1	...	1	...	2	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	-29	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \infty$ であることも考慮すると、 $y=g(x)$ のグラフ及び、直線 $y=a$ は下図のようになる。



よって、 $a < -29$ のとき、共有点を持たず、 $a = -29$ のとき、ただ1つの共有点を持つ。
 $-29 < a < -2$ または、 $3 < a$ のとき、共有点を丁度2個持つ。 $a = -2$ または、 $a = 3$ のとき、共有点を丁度3個持ち、 $-2 < a < 3$ のとき、共有点を4個もつ。

$a = -2$ のとき、

$$\begin{aligned} g(x) &= -2 \\ \Leftrightarrow 3x^4-8x^3-6x^2+24x-8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2(3x^2+4x-2) &= 0 \\ \therefore x &= 2, \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

より、 $x = 2, \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}$ において、3つの共有点を持ち、

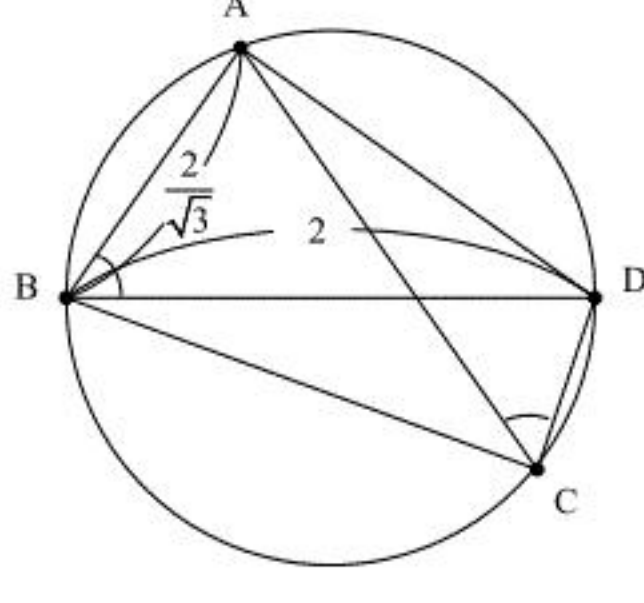
$a = 3$ のとき、

$$\begin{aligned} g(x) &= 3 \\ \Leftrightarrow 3x^4-8x^3-6x^2+24x-13 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2(3x^2-2x-13) &= 0 \\ \therefore x &= 1, \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

より、 $x = 1, \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{3}$ において、3つの共有点を持つ。

【Ⅲ】

1.



BD が外接円の中心を通ることより、 $\triangle ABD$ は直角三角形であるから、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{BD^2 - AB^2} \\ &= \sqrt{4 - \frac{4}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

となる。 $\triangle ABD$ に注目すると、 $\cos \angle ABD = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であることがわかる。弧 AD について、円周

角の定理より、 $\angle ABD = \angle ACD$ となる。よって、 $\cos \angle ACD = \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。一方で、 $\triangle ACD$ に

ついて余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \angle ACD &= \frac{AC^2 + CD^2 - AD^2}{2AC \cdot CD} \\ &= \frac{\frac{25}{3}CD^2 + CD^2 - \frac{8}{3}}{2 \cdot \frac{5}{\sqrt{3}}CD^2} \\ &= \frac{14CD^2 - 4}{5\sqrt{3}CD^2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{14CD^2 - 4}{5\sqrt{3}CD^2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow 14CD^2 - 4 &= 5CD^2 \\ \therefore CD &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

とわかる。また、BD が外接円の中心を通ることより、 $\triangle CBD$ は直角三角形であるから、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{BD^2 - CD^2} \\ &= \sqrt{4 - \frac{4}{9}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

とわかる。四角形 ABCD の面積は $\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ の面積の和であるから、四角形 ABCD の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{10\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

となる。

(答) CD の長さ $\frac{2}{3}$
四角形 ABCD の面積 $\frac{10\sqrt{2}}{9}$

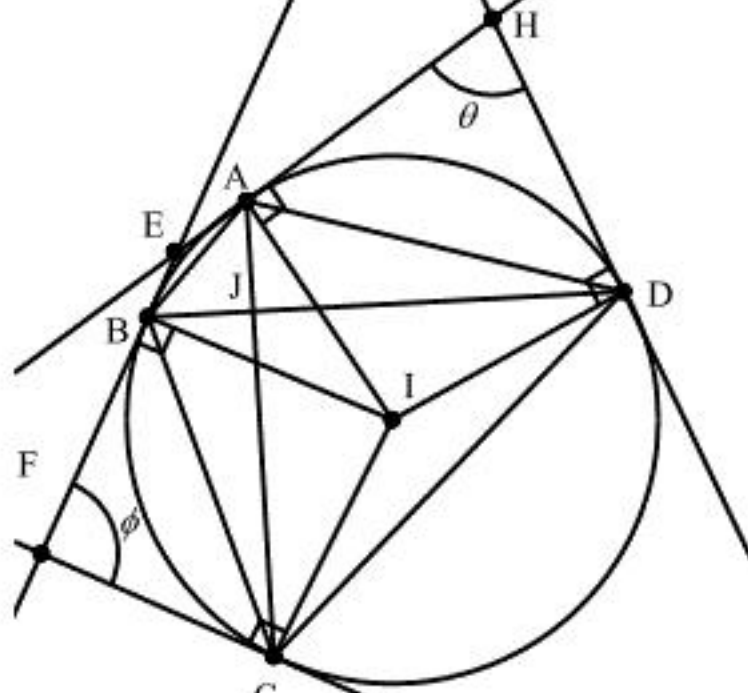
2.

四角形 EFGH が外接円をもつことは、 $\angle EHG + \angle EFG = 180^\circ$ であることと同値である。円 O の中心を I、AC と BD の交点を J とし、 $\angle EHG = \theta$ 、 $\angle EFG = \phi$ とおく。

[1] 四角形 ABCD の内部に点 I があるとき

[i] 四角形 EFGH が外接円をもつとき

$\theta + \phi = 180^\circ$ である。



四角形 AIDH の内角に注目すると $\angle AID = 180^\circ - \theta$ であり、四角形 BICF の内角に注目すると $\angle BIC = 180^\circ - \phi$ である。弧 AD について、円周角の定理より、

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \angle AID = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

となる。弧 BC について、円周角の定理より、

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BIC = 90^\circ - \frac{\phi}{2}$$

となる。 $\triangle AIB$ の内角に注目すると、

$$\begin{aligned} \angle ABJ + \angle BAJ + \angle AIB &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow 90^\circ - \frac{\theta}{2} + 90^\circ - \frac{\phi}{2} + \angle AIB &= 180^\circ \\ \therefore \angle AIB &= 90^\circ (\because \theta + \phi = 180^\circ) \end{aligned}$$

となる。よって、AC と BD は直交する。

[ii] AC と BD が直交するとき、

[1]と同様にして、 $\angle ABD = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$ 、 $\angle BAC = 90^\circ - \frac{\phi}{2}$ とわかる。 $\triangle AIB$ の内角に注目

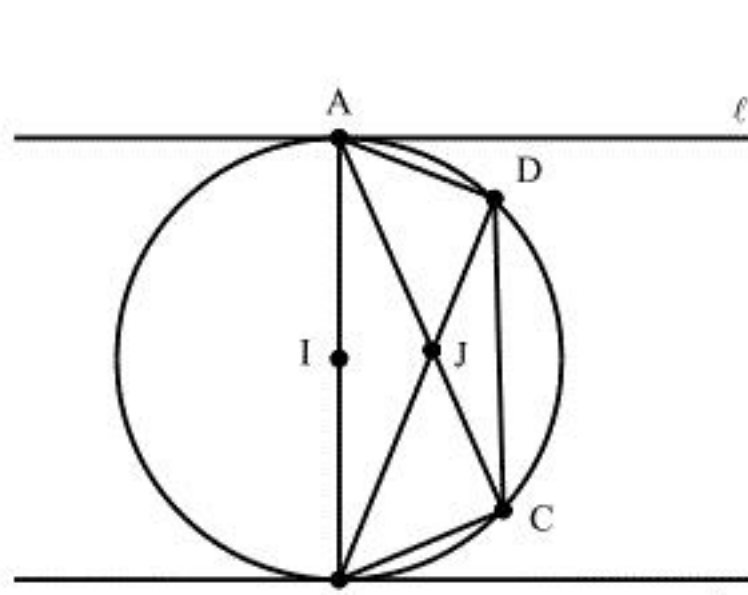
すると、

$$\begin{aligned} \angle ABJ + \angle BAJ + \angle AIB &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow 90^\circ - \frac{\theta}{2} + 90^\circ - \frac{\phi}{2} + 90^\circ &= 180^\circ \\ \therefore \theta + \phi &= 180^\circ \end{aligned}$$

となる。よって $\angle EHG + \angle EFG = 180^\circ$ であるから、四角形 EFGH は外接円を持つ。

[2] 四角形 ABCD の周上に点 I があるとき

対称性より、線分 AB 上に点 I が存在するとする。



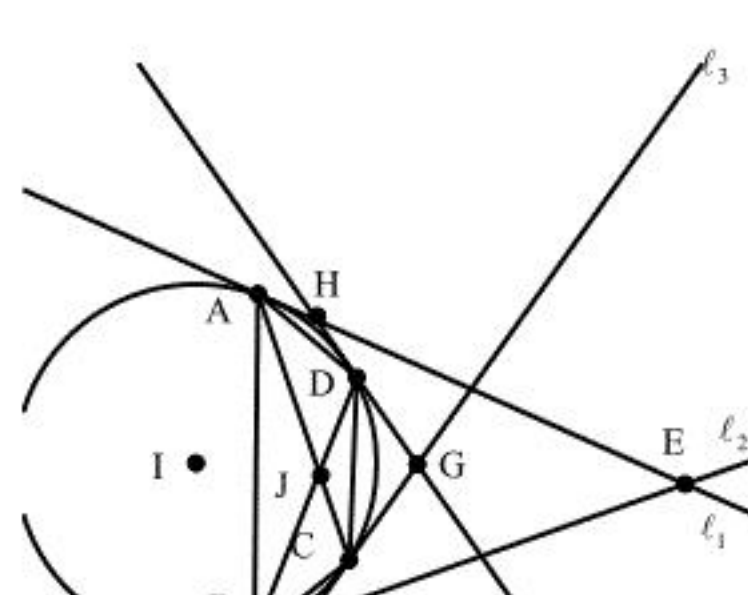
このとき、 ℓ_1 と ℓ_2 は平行であるため、点 E は存在しない。よって、四角形 EFGH は存在しない。また、

$$\begin{aligned} \angle AIB &= \angle ACB + \angle DBC \\ &= 90^\circ + \angle DBC \end{aligned}$$

であるから AC と BD は直交しない。

[3] 四角形 ABCD の外部に点 I があるとき

対称性より、弧 AB の短い側に点 C、D があるとする。



このとき四角形 EFGH は凸でないため、円に外接しない。また、円周角の定理より $\angle ACB > 90^\circ$ なので、

$$\angle AIB = \angle ACB + \angle DBC > 90^\circ$$

となる。よって、AC と BD は直交しない。

以上[1],[2],[3]より、四角形 EFGH が外接円を持つための必要十分条件は、「AC と BD が直交すること」である。

(証明終)