

【Ⅰ】

【解答】

ア	7
イ	6
ウ	2
エ	7
オ	4

カ	2
キ	3
ク	8
ケ	1
コ	4
サ	3
シ	8

ス	1
セ	5

ソ	1
タ	8
チ	9
ツ	1
テ	5
ト	2
ナ	1
ニ	3
ヌ	3

【解説】

- (1)
- $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りが13になることから、多項式 $P(x)$ を用いて、
$$f(x)=P(x)(x-1)+13 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表される。 $f(x)$ を $x+1$ で割ると余りが-1になることから、多項式 $Q(x)$ を用いて、
$$f(x)=Q(x)(x+1)-1 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と表される。 $f(x)$ を $(x-1)(x+1)$ で割った余りは、定数 a, b を用いて、 $ax+b$ と表される。したがって、多項式 $R(x)$ を用いて、
$$f(x)=R(x)(x-1)(x+1)+ax+b \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

と表される。 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、 $f(1)=13, f(-1)=-1$ である。一方 $\textcircled{3}$ より、
$$f(1)=a+b, f(-1)=-a+b$$

であるから、
$$\begin{cases} a+b=13 \\ -a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=6 \end{cases}$$

となる。よって、 $f(x)$ を $(x-1)(x+1)$ で割った余りは、 $7x+6$ となる。次に、 $f'(x)$ を $x-1$ で割った余りが11であるとき、 $f'(x)$ は多項式 $S(x)$ を用いて、
$$f'(x)=S(x)(x-1)+11 \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

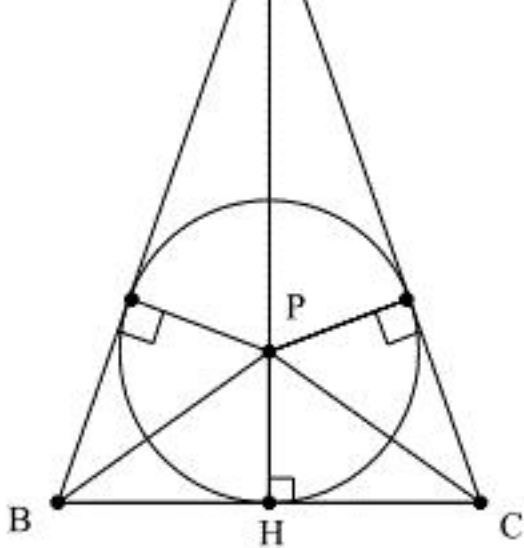
と表される。 $f(x)$ を $(x-1)^2(x+1)$ で割った余りは、定数 α, β, γ を用いて、 $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ と表される。したがって、多項式 $T(x)$ を用いて、
$$f(x)=T(x)(x-1)^2(x+1)+\alpha x^2+\beta x+\gamma \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

と表される。よって、
$$f'(x)=\{T(x)(x+1)\}'\cdot(x-1)^2+\{T(x)(x+1)\}\cdot 2(x-1)+2\alpha x+\beta \qquad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

となる。 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、 $f(1)=13, f(-1)=-1$ である。一方で $\textcircled{5}$ より、
 $f(1)=\alpha+\beta+\gamma, f(-1)=\alpha-\beta+\gamma$ である。また、 $\textcircled{4}$ より、 $f'(1)=11$ である。一方で $\textcircled{6}$ より、
 $f'(1)=2\alpha+\beta$ である。以上より、
$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=13 \\ \alpha-\beta+\gamma=-1 \\ 2\alpha+\beta=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=7 \\ \gamma=4 \end{cases}$$

となる。よって、 $f(x)$ を $(x-1)^2(x+1)$ で割った余りは、 $2x^2+7x+4$ となる。

- (2)
- △ABCは下図の通りである。



点Aから底辺BCにおろした垂線の足をHとする。BH= $\frac{1}{2}$ BC=2、AB=6より、△ABHにおいて三平方の定理より、
$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{AB^2 - BH^2} \\ &= \sqrt{6^2 - 2^2} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。よって△ABCの面積をSとすると、
$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = 8\sqrt{2}$$

となる。一方で、△ABCの内接円の半径をrとすると、
$$S = \frac{1}{2} r \cdot (AB + BC + CA) = 8r$$

と表せるので、 $8\sqrt{2} = 8r$ より $r = \sqrt{2}$ となる。二等辺三角形ABCは線分AHに対して、線対称であるから内心Pは線分AH上にある。よって、
$$\begin{aligned} AP &= AH - PH \\ &= 4\sqrt{2} - \sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

であるから、 $\overline{AP} = \frac{3}{4}\overline{AH}$ となる。 $\overline{AH} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}$ より、
$$\overline{AP} = \frac{3}{8}(\overline{AB} + \overline{AC})$$

となる。また、
$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \frac{3}{8}(\overline{AB} + \overline{AC}) \\ \Leftrightarrow \overline{BP} - \overline{BA} &= \frac{3}{8}(-\overline{BA} + \overline{BC} - \overline{BA}) \\ \Leftrightarrow \overline{BP} &= \frac{1}{4}\overline{BA} + \frac{3}{8}\overline{BC} \end{aligned}$$

となる。

- (3)
- $A = \frac{2\pi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt}$ とおくと、 $f(x) = \pi x \sin x + A$ と表される。よって、
$$\begin{aligned} A &= \frac{2\pi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi t \sin t + A) dt} \\ &= \frac{2\pi}{[-\pi t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos t dt + [At]_0^{\frac{\pi}{2}}} \\ &= \frac{2\pi}{[\pi \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{A\pi}{2}} \\ &= \frac{2\pi}{\pi + \frac{A\pi}{2}} \\ &= \frac{4}{2 + A} \\ \therefore 2A + A^2 &= 4 \\ \therefore A^2 + 2A - 4 &= 0 \\ \therefore A &= -1 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。したがって、
$$f(x) = \pi x \sin x - 1 + \sqrt{5}$$

または
$$f(x) = \pi x \sin x - 1 - \sqrt{5}$$

である。

- (4)
- 3つの異なるさいころの目の出方は、
 $6^3 = 216$ (通り)
である。3つのさいころの出た目の積が2の倍数とならないのは、すべてのさいころで1, 3, 5いずれかの目が出た場合であるから、その目の出方は、
 $3^3 = 27$ (通り)
である。よって、3つのさいころの出た目の積が2の倍数となる目の出方は、
 $216 - 27 = 189$ (通り)
である。3つのさいころの出た目の積が3の倍数とならないのは、すべて1, 2, 4, 5いずれかの目が出た場合であるから、その目の出方は、
 $4^3 = 64$ (通り)
である。よって、3つのさいころの出た目の積が3の倍数となる目の出方は、
 $216 - 64 = 152$ (通り)
である。3つのさいころの出た目の積が2の倍数にも3の倍数にもならないのは、すべて1, 5いずれかの目が出た場合であるから、その目の出方は、
 $2^3 = 8$ (通り)
である。よって、3つのさいころの出た目の積が2の倍数または3の倍数になる事象は、
 $216 - 8 = 208$ (通り)
である。6の倍数は3の倍数かつ2の倍数であるから、3つのさいころの出た目の積が6の倍数となるような目の出方は、
 $189 + 152 - 208 = 133$ (通り)
である。

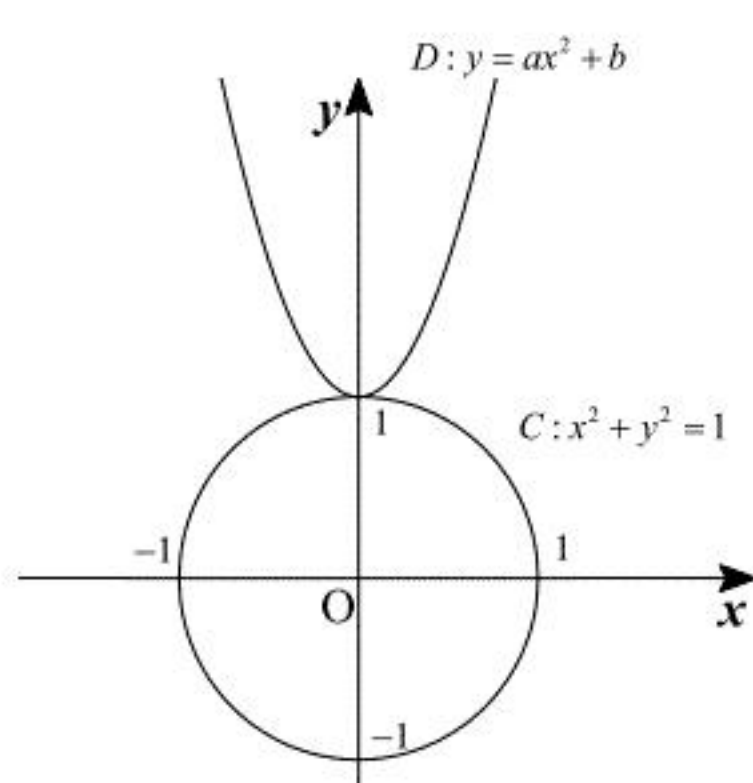
【Ⅱ】

【解答】

あ	1
い	-1
う	$0 < a \leq \frac{1}{2}$
え	$-1 < b < 1$
お	$-\left(a + \frac{1}{4a}\right)$
か	$a > \frac{1}{2}$

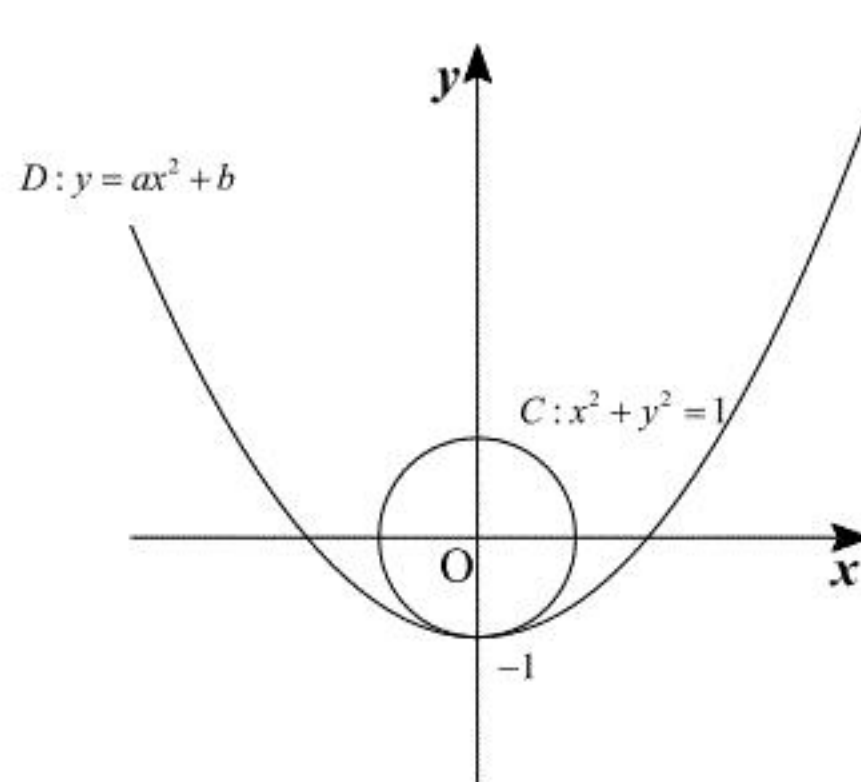
【解説】

(1)



放物線 $D: y = ax^2 + b$ の頂点の y 座標が正であり、円 $C: x^2 + y^2 = 1$ との共有点がただ1つであるとき、放物線 D は円 C と上図のように、 $(0, 1)$ で共有点をもつ。放物線 D の頂点は $(0, b)$ であるから、このとき $b = 1$ である。

(2)



放物線 $D: y = ax^2 + b$ の頂点の y 座標が負であり、円 $C: x^2 + y^2 = 1$ との共有点がただ1つであるとき、放物線 D は円 C と上図のように、 $(0, -1)$ で共有点をもつ。放物線 D の頂点は $(0, b)$ であるから、このとき $b = -1$ である。 $x^2 + y^2 = 1$ に $y = ax^2 + b$ を代入して、 y を消去すると、

$$x^2 + (ax^2 + b)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 x^4 + (1 + 2ab)x^2 + b^2 - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $b = -1$ のとき、①は

$$a^2 x^4 + (1 - 2a)x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left(x^2 - \frac{2a-1}{a^2} \right) = 0 \quad (\because a > 0) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。②が $x = 0$ 以外に実数解を持たなければよいので、 $x^2 - \frac{2a-1}{a^2} = 0$ が 0 以外の解を持たないような a の範囲を求める。すなわち、

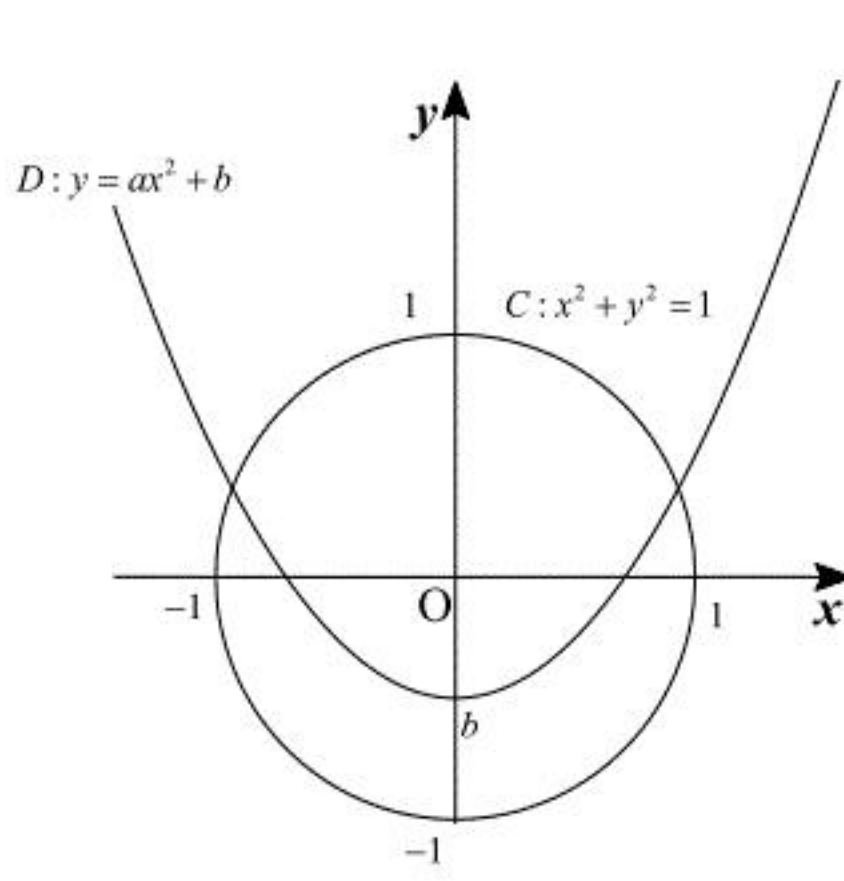
$$\frac{2a-1}{a^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a-1 \leq 0 \quad (\because a^2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{1}{2}$$

となる。よって、 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ となる。

(3)



放物線 $D: y = ax^2 + b$ の頂点が円 $C: x^2 + y^2 = 1$ の内部にあるとき、

$$-1 < b < 1$$

$$\text{を満たす。上図より式①において } x^2 = t \text{ とおくと、①は、}$$

$$a^2 t^2 + (1 + 2ab)t + b^2 - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

と変形できる。③の左辺を $f(t)$ とおき、 $y = f(t)$ のグラフを考える。 $a^2 > 0$ より $y = f(t)$ のグラフは下に凸であり、 $-1 < b < 1$ のとき、 $f(0) = b^2 - 1 < 0$ である。したがって、 $f(t) = 0$ 、つまり方程式③は、 t について正の解と負の解を1つずつもつ。 $t > 0$ を満たす t について $x = t^2$ は $x = \pm\sqrt{t}$ の2つの異なる実数解をとる。 $t < 0$ を満たす t について $x = t^2$ は実数解を持たない。よって、 x の方程式①は実数解をちょうど2つもつ。したがって、 b のとり得る値の範囲は

$$-1 < b < 1$$

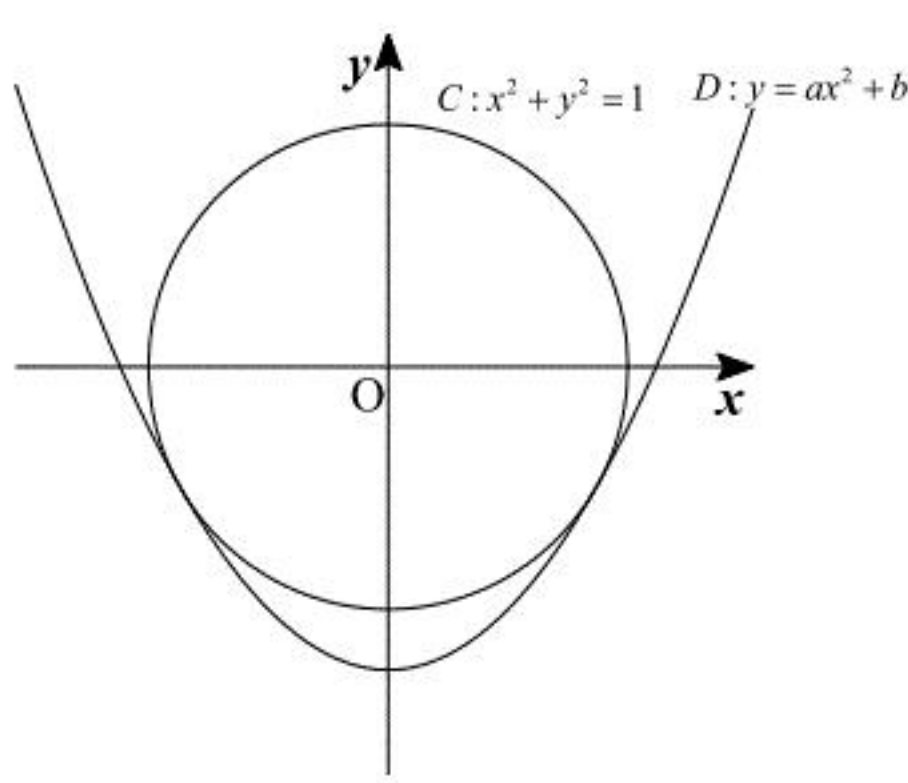
である。

(4)

放物線 $D: y = ax^2 + b$ の頂点が円 $C: x^2 + y^2 = 1$ の外部にあるとき、

$$b > 1 \text{ または } b < -1$$

である。 $b > 1$ のとき放物線 $D: y = ax^2 + b$ 上の任意の点は $y > 1$ に存在するため、放物線 $D: y = ax^2 + b$ は円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と共有点を持たない。よって $b < -1$ であることが必要である。



③の $t > 0$ を満たす t の解 t_1, t_2 に対し、①を満たす x の解は $x = \pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2}$ で2つずつ存在する。 $b < -1$ のとき、 $\frac{b^2-1}{a^2} > 0$ であるから、③が解をもつとき、解と係数の関係より③の2つの

実数解の正負は一致する。よって、 x についての方程式①が2つの実数解をもつのは t についての方程式③が正の解をただ1つ持つ、すなわち、正の重解を持つときである。よって、③

の判別式 $D = 0$ かつ、③の重解の和が正となればよい。したがって、

$$\begin{cases} (1+2ab)^2 - 4a^2(b^2-1) = 0 \\ -\frac{1+2ab}{a^2} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+4ab+4a^2 = 0 \\ b < -\frac{1}{2a} \quad (\because a > 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\left(a + \frac{1}{4a}\right) \\ -\left(a + \frac{1}{4a}\right) < -\frac{1}{2a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\left(a + \frac{1}{4a}\right) \\ \frac{4a^2-1}{4a} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\left(a + \frac{1}{4a}\right) \\ a > \frac{1}{2} \quad (\because a > 0) \end{cases}$$

となる。

〔Ⅲ〕

(1)

$(ax^n)' = nax^{n-1}$, $(\log x)' = \frac{1}{x}$ である。曲線 $y = ax^n$ と曲線 $y = \log x$ が点 P で接していることから,

$$\begin{cases} ap^n = \log p \\ nap^{n-1} = \frac{1}{p} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ap^n = \log p \\ ap^n = \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = e^{\frac{1}{n}} \\ ap^n = \frac{1}{n} \end{cases}$$

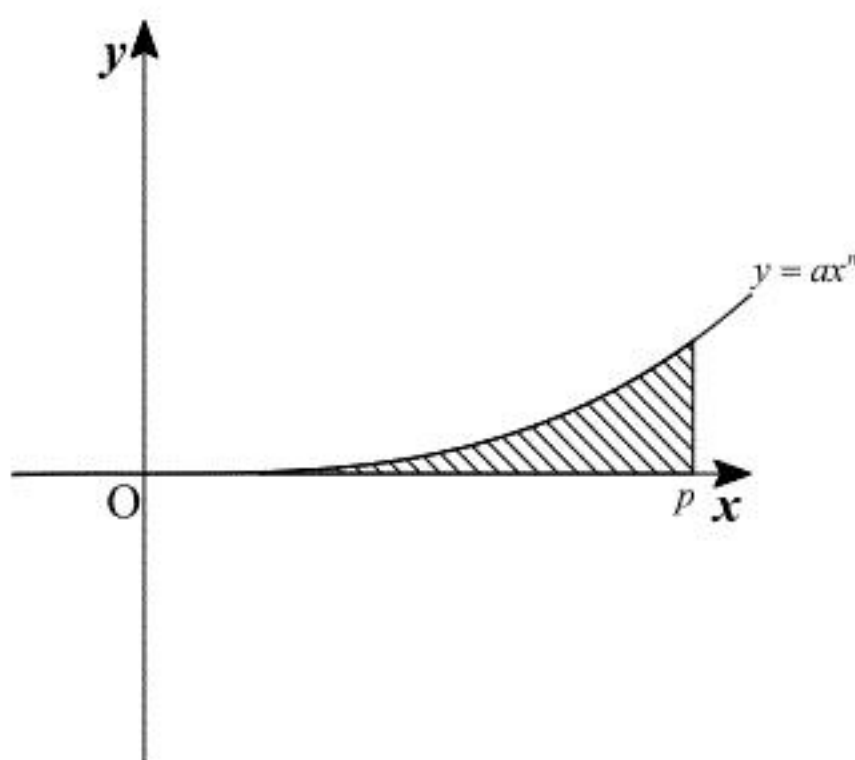
$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = e^{\frac{1}{n}} \\ a = \frac{1}{en} \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p = e^{\frac{1}{n}}, \quad a = \frac{1}{en}$$

(2)

$(ax^n)' = nax^{n-1} > 0$ より $y = ax^n$ のグラフは下図のようになる。



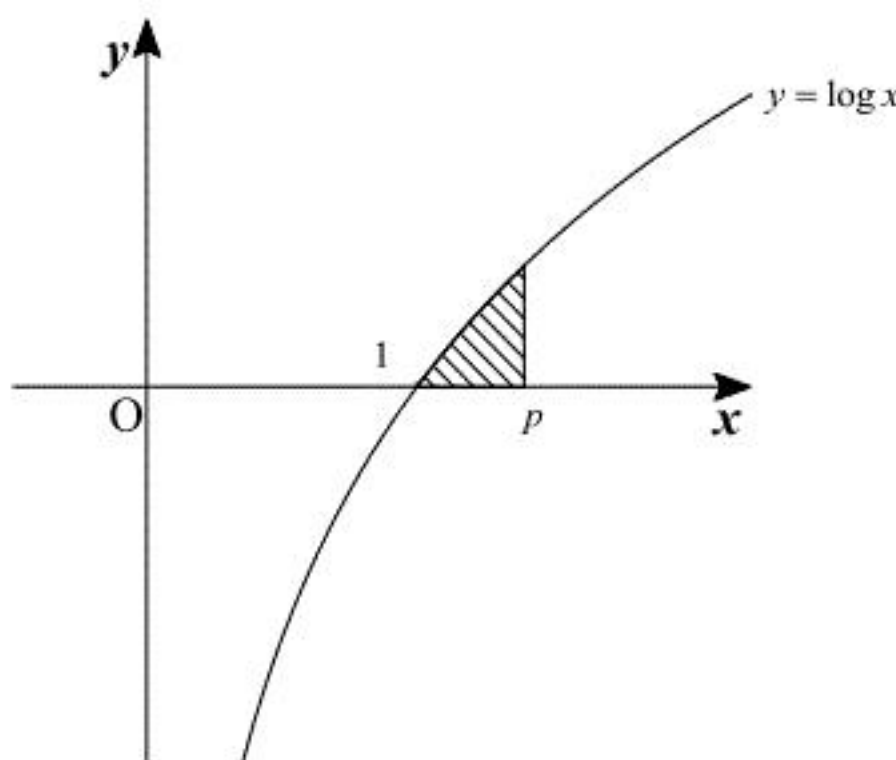
求める面積 S_n は上図の斜線部分である。よって

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^p ax^n dx \\ &= \left[\frac{a}{n+1} x^{n+1} \right]_0^p \\ &= \frac{a}{n+1} p^{n+1} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n(n+1)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n(n+1)}$$

(3)



求める面積 T_n は上図の斜線部分である。よって

$$\begin{aligned} T_n &= \int_1^p \log x dx \\ &= [x \log x]_1^p - \int_1^p dx \\ &= p \log p - p + 1 \\ &= \frac{1-n}{n} e^{\frac{1}{n}} + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad T_n = \frac{1-n}{n} e^{\frac{1}{n}} + 1$$

(4)

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{S_n} &= \frac{\frac{1-n}{n} e^{\frac{1}{n}} + 1}{\frac{1}{en(n+1)} e^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{(1-n^2)e^{\frac{1}{n}} + n^2 + n}{e^{\frac{1}{n}}} \\ &= 1 - n^2 + n(n+1)e^{-\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

である。 $\frac{1}{n} > 0$ であるから,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} &< e^{-\frac{1}{n}} < 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \\ \Leftrightarrow n - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} &< ne^{-\frac{1}{n}} < n - 1 + \frac{1}{2n} \quad (\because n > 0) \\ \Leftrightarrow n^2 - 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) &< n(n+1)e^{-\frac{1}{n}} < n^2 - 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad (\because n+1 > 0) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) &< 1 - n^2 + n(n+1)e^{-\frac{1}{n}} < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) &< \frac{T_n}{S_n} < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

となる。 $n \rightarrow \infty$ で $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$ となるから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n} = \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n} = \frac{1}{2}$$