

〔Ⅰ〕

〔解答〕

1	1
---	---

〔解説〕

四面体 ABCD は一辺の長さ 4 の正四面体であるから、

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 4$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 8$$

である。AP = 2, AQ = 3 より、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$$

であり、

$$\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \left(\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) \cdot \left(\frac{3}{4} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) \\ &= \frac{3}{4} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{3}{8} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

である。また、

$$|\overrightarrow{PD}| = \left| \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2} = 2\sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \left| \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{\frac{9}{16} |\overrightarrow{AC}|^2 - \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2} = \sqrt{7}$$

であるから、

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PD}| |\overrightarrow{PQ}|} = \frac{3}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

である。0 < θ < π より、sin θ > 0 であるから、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

2	B
3	H

〔解説〕

$y = x^2$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動させると, このグラフの方程式は

$$y = (x - p)^2 + q$$

となる。このとき,

$$y' = 2(x - p)$$

であるから, $y = (x - p)^2 + q$ と直線 $y = 2x - 4$ の接点の x 座標は

$$2(x - p) = 2 \Leftrightarrow x = p + 1$$

である。この接点での y 座標に注目すると,

$$\begin{aligned} (p + 1 - p)^2 + q &= 2(p + 1) - 4 \\ \Leftrightarrow q &= 2p - 3 \end{aligned}$$

となる。また, 頂点の移動距離は,

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 + q^2} &= \sqrt{p^2 + (2p - 3)^2} \\ &= \sqrt{5p^2 - 12p + 9} \\ &= \sqrt{5\left(p - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}} \end{aligned}$$

と表せるから, $p = \frac{6}{5}$ のとき, 移動距離が最も短くなる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

4	C
---	---

〔解説〕

今年のB市の人口を x 人とする、A市の人口は $3x$ 人と表される。すると n 年後には、A市

の人口は $3x\left(\frac{98}{100}\right)^n$ 人、B市の人口は $x\left(\frac{105}{100}\right)^n$ 人となるから、

$$x\left(\frac{105}{100}\right)^n > 3x\left(\frac{98}{100}\right)^n$$

が成り立つ最小の自然数 n を求めればよい。

$$x\left(\frac{105}{100}\right)^n > 3x\left(\frac{98}{100}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow 105^n > 3 \cdot 98^n$$

より、両辺常用対数をとると、

$$n \log_{10} 105 > \log_{10} 3 + n \log_{10} 98$$

$$\Leftrightarrow n(\log_{10} 3 + \log_{10} 5 + \log_{10} 7 - \log_{10} 2 - 2 \log_{10} 7) > \log_{10} 3$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{0.4771}{0.4771 + 0.6990 - 0.3010 - 0.8451}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{0.4771}{0.0300}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{4771}{300} = 15 + \frac{271}{300}$$

となるから、B市の人口がA市の人口よりも初めて多くなるのは16年後の調査である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

5	I
6	H
7	E
8	A
9	G
101	9

〔解説〕

$y = x^2 - 6$ と $y = kx^2$ を連立して y を消去すると、

$$kx^2 = x^2 - 6$$

$$\Leftrightarrow x^2(1 - k) = 6$$
となる。この2次方程式が異なる2解を持つとき $k < 1$ であるから、 $0 < k < 1$ である。このとき、

$$x^2(1 - k) = 6 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{6}{1 - k}}$$

となる。よって、放物線 C と放物線 D の共有点のうち、 x 座標が正である点の x 座標は

$$x = \sqrt{\frac{6}{1 - k}} \text{ であるから、 } a = \sqrt{\frac{6}{1 - k}} \text{ である。これより、}$$

$$a^2 = \frac{6}{1 - k} \Leftrightarrow k = 1 - \frac{6}{a^2}$$

となる。 $y = kx^2$ のとき $y' = 2kx$ であるから、点 A における放物線 D の接線 ℓ の方程式は

$$y = 2ka(x - a) + ka^2$$

$$\therefore y = 2\left(a - \frac{6}{a}\right)x + 6 - a^2$$

となる。 $y = x^2 - 6$ と $y = 2\left(a - \frac{6}{a}\right)x + 6 - a^2$ を連立して y を消去すると、

$$x^2 - 6 = 2\left(a - \frac{6}{a}\right)x + 6 - a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\left(a - \frac{6}{a}\right)x + a^2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)\left\{x - \left(a - \frac{12}{a}\right)\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = a, a - \frac{12}{a}$$

となるから、点 B の x 座標は $x = a - \frac{12}{a}$ である。さらに、点 B の x 座標が -1 であるとき、

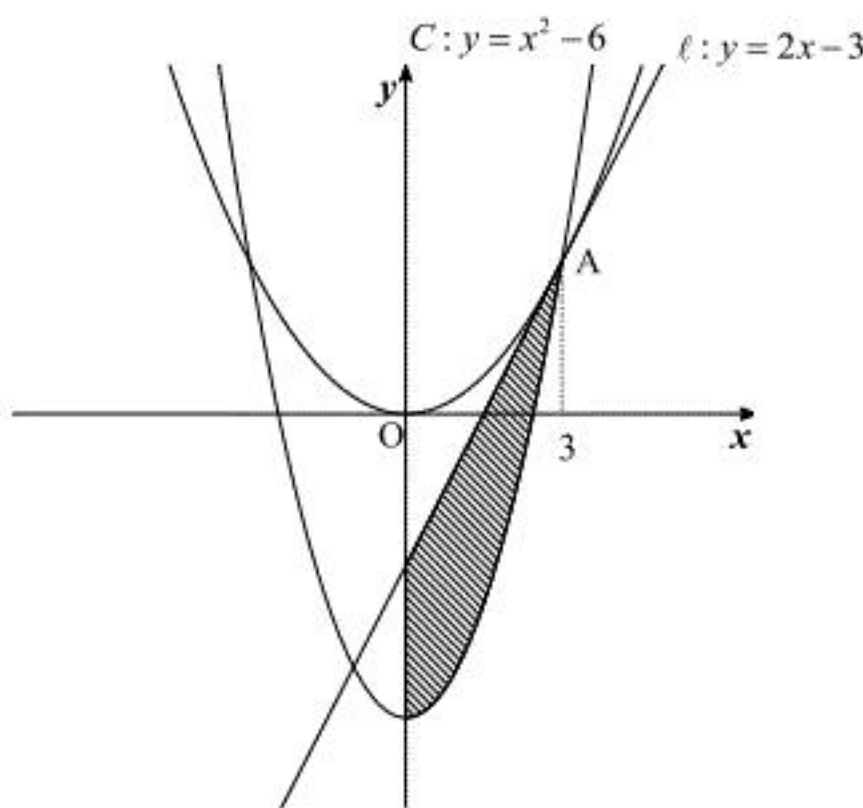
$$a - \frac{12}{a} = -1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 4)(a - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 3 \text{ (} \because a > 0 \text{)}$$

である。このとき、接線 ℓ の方程式は $y = 2x - 3$ である。区間 $0 \leq x \leq a$ で放物線 C と接線 ℓ および y 軸で囲まれた図形は下図の斜線部である。



したがって、求める面積 S は、

$$S = \int_0^3 \left\{ (2x - 3) - (x^2 - 6) \right\} dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_0^3$$

$$= -9 + 9 + 9$$

$$= 9$$

である。

〔V〕

〔解答〕

10	I
11	D
102	7

〔解説〕

(1)

$$2250 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$$

であるから、 X が 2250 の倍数となるのは、

$$a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$$

のときである。したがって、求める場合の数は、

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 (\text{通り})$$

である。

(2)

X の正の約数の個数は、

$$(a+1)(b+1)(c+1)$$

である。 $a+1 \geq 2, b+1 \geq 2, c+1 \geq 2$ に注意すると、約数が 24 個になるのは 3 つの数の組が、

$$(2, 2, 6), (2, 3, 4)$$

のいずれかのときである。 $(2, 2, 6)$ となるのは 3 通りあり、 $(2, 3, 4)$ となるのは $3! = 6$ (通り)

あるから、求める場合の数は、

$$3 + 6 = 9 (\text{通り})$$

である。

(3)

$X = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ とするとき、

$$10^7 < X < 2 \times 10^7 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たす (a, b, c) の組の数を求める。 $c \leq 3$ のとき、

$$X \leq 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^3 = 5.832 \times 10^6 < 10^7$$

であるから、 $\textcircled{1}$ が成り立つためには $c \geq 4$ が必要である。以下、 c の値で場合分けする。

[1] $c = 4$ のとき

$b \leq 5$ のとき、

$$X \leq 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^4 = 9.72 \times 10^6 < 10^7$$

であるから、 $b = 6$ が必要である。以下、ある b, c に対して $\textcircled{1}$ を満たす a が存在するならば、そのような a は 1 つに限られることに注意する。 $b = 6, c = 4$ のとき、 $a = 5$ で

$$X = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^4 = 1.458 \times 10^7$$

となり $\textcircled{1}$ を満たす。以上より、 $c = 4$ のとき $\textcircled{1}$ を満たす (a, b, c) の組は、

$$(a, b, c) = (5, 6, 4)$$

の 1 通りである。

[2] $c = 5$ のとき

$b \leq 3$ のとき、

$$X \leq 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^5 = 5.4 \times 10^6 < 10^7$$

より、 $b \geq 4$ が必要である。 $b = 4$ のとき、 $a = 6$ で

$$X = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^5 = 1.62 \times 10^7$$

となり、 $\textcircled{1}$ を満たす。また、 $b = 5$ のとき、 $a = 4$ で

$$X = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^5 = 1.215 \times 10^7$$

であり、 $b = 6$ のとき、 $a = 3$ で

$$X = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^5 = 1.8225 \times 10^7$$

となる。以上より、 $c = 5$ のとき $\textcircled{1}$ を満たす (a, b, c) の組は、

$$(a, b, c) = (6, 4, 5), (4, 5, 5), (3, 6, 5)$$

の 3 通りである。

[3] $c = 6$ のとき

$b \leq 2$ のとき、

$$X \leq 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^6 = 0.9 \times 10^6 < 10^7$$

であり、 $b = 6$ のとき、

$$X \geq 2 \cdot 3^6 \cdot 5^6 = 2.278125 \times 10^7 > 2 \times 10^7$$

であるから、 $3 \leq b \leq 5$ が必要である。 $b = 3$ のとき、 $a = 5$ で

$$X = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^6 = 1.35 \times 10^7$$

となり、 $\textcircled{1}$ を満たす。また、 $b = 4$ のとき、 $a = 3$ で

$$X = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = 1.0125 \times 10^7$$

であり、 $b = 5$ のとき、 $a = 2$ で

$$X = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^6 = 1.51875 \times 10^7$$

となる。以上より、 $c = 6$ のとき $\textcircled{1}$ を満たす (a, b, c) の組は、

$$(a, b, c) = (5, 3, 6), (3, 4, 6), (2, 5, 6)$$

の 3 通りである。

以上 [1] ~ [3] より、 $10^7 < X < 2 \times 10^7$ を満たす場合は 7 通りである。

〔VI〕

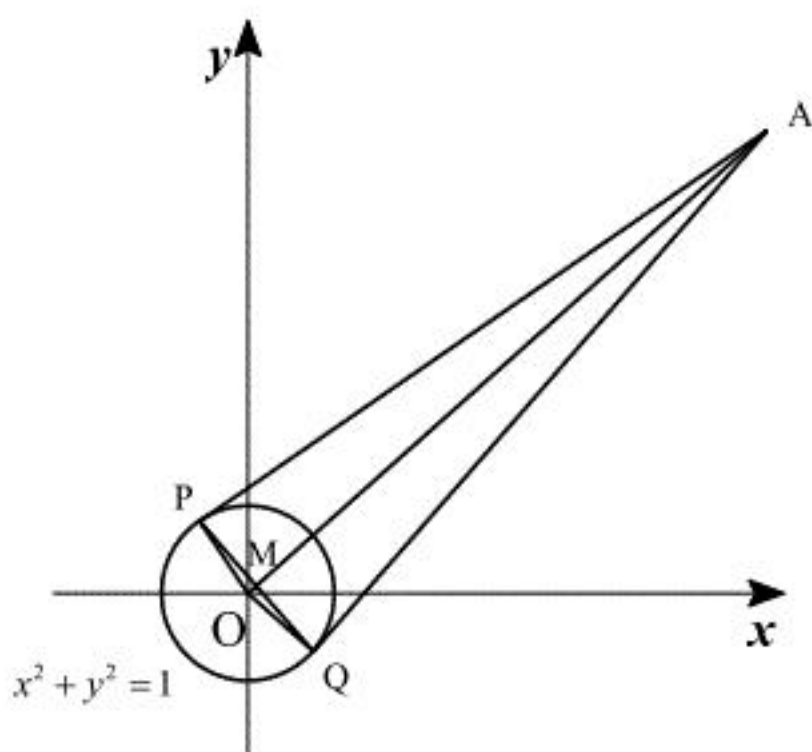
〔解答〕

12	B
13	C
14	C
103	$\frac{3\sqrt{7}}{64}$

〔解説〕

(1)

円 $x^2 + y^2 = 1$ および、点 A, P, Q を図示すると以下のようになる。



$$OA = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{7})^2} = 8, OP = 1$$

であり、 $\triangle AOP$ は $\angle OPA = 90^\circ$ の直角三角形であるから

$$\cos \theta = \frac{OP}{OA} = \frac{1}{8}$$

である。

(2)

$\angle OMP = 90^\circ$ であるから、

$$OM = OP \cos \theta = \frac{1}{8}$$

である。M は線分 OA 上にあるから、 $\overrightarrow{OM}$ は実数 t を用いて、

$$\overrightarrow{OM} = t \overrightarrow{OA} = t \begin{pmatrix} 6 \\ 2\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

と表せる。 $|\overrightarrow{OM}| = 8t = \frac{1}{8}$ であるとき、 $t = \frac{1}{64}$ より、M の座標は $\left(\frac{3}{32}, \frac{\sqrt{7}}{32}\right)$ となる。

(3)

$0 < \theta < 180^\circ$ より $\sin \theta > 0$ であるから、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

であり、

$$PQ = 2PM = 2OP \sin \theta = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

である。よって、

$$S = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{64}$$

となる。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

15	C
16	J
17	F
18	E

〔解説〕

(1)

A_n, B_n の定義より, 0 以上の整数 n に対して $\triangle A_n B_n C$ は1辺の長さが $\frac{1}{2^n}$ の正三角形である

から, 線分 $A_2 B_2$ の長さは,

$$A_2 B_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

である。

(2)

A_{n+1} は, B_n から線分 $A_n C$ に下ろした垂線の足である。よって,

$$B_n A_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} A_n B_n = \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$$

と表せるから,

$$B_2 A_3 = \frac{\sqrt{3}}{2^3} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

である。

(3)

(1)での議論より, 線分 $A_n B_n$ の長さは $\frac{1}{2^n}$ である。

(4)

求める折れ線の長さは,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n A_k B_k + \sum_{k=0}^{n-1} B_k A_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 - \frac{1}{2^n} + \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \\ &= 2 + \sqrt{3} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2^n} \end{aligned}$$

となる。