

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ			
	6	2	2			
(2)	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	1	3	2	3	9	6
(3)	コ	サ				
	6	8				
(4)	シ	ス	セ			
	1	3	5			

【解説】

(1)漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると、

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} &= 6 \cdot \frac{a_n}{2^{n+1}} - \frac{2^n}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} &= 3 \cdot \frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと、

$$b_{n+1} = 3b_n - \frac{1}{2}$$

となるから、これを变形すると、

$$b_{n+1} - \frac{1}{4} = 3\left(b_n - \frac{1}{4}\right)$$

となる。これは、数列 $\left\{b_n - \frac{1}{4}\right\}$ が初項 $b_1 - \frac{1}{4} = \frac{a_1}{2} - \frac{1}{4} = 3$ 、公比3の等比数列であることを表す。

よって、

$$b_n - \frac{1}{4} = 3 \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow b_n = 3^n + \frac{1}{4}$$

となる。ゆえに、

$$a_n = 2^n \left(3^n + \frac{1}{4}\right) = 6^n + 2^{n-2}$$

である。

(2)

点Hは直線AB上に存在するから、点Hの座標 (x, y, z) は実数 t を用いて、

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \overline{OA} + t\overline{AB} \\ &= (-3, 2, 9) + t(6 - (-3), 7 - 2, -3 - 9) \\ &= (-3, 2, 9) + t(9, 5, -12)\end{aligned}$$

と表せる。また、 $\overline{OH}$ は $\overline{AB}$ と垂直であるから、

$$\begin{aligned}\overline{OH} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-3 + 9t) \cdot 9 + (2 + 5t) \cdot 5 + (9 - 12t) \cdot (-12) &= 0 \\ \Leftrightarrow -125 + 250t &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって、点Hの座標は

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 3\right)$$

となる。よって、線分OHを2:1に内分する点の座標は

$$\frac{2}{2+1}\overline{OH} = (1, 3, 2)$$

より $(1, 3, 2)$ となる。さらに線分OHを2:1に外分する点の座標は

$$\frac{2}{2-1}\overline{OH} = (3, 9, 6)$$

より $(3, 9, 6)$ となる。

(3)

真数条件、底の条件より、

$$\begin{aligned}\frac{x-6}{x-4} > 0 \text{ かつ } x > 0 \text{ かつ } x-4 > 0 \text{ かつ } x-4 \neq 1 \\ \Leftrightarrow x > 6\end{aligned}$$

である。底が2であることに注意して不等式を整理すると、

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{x-6}{x-4} + \frac{\log_{x-4} x}{\log_{x-4} 2} &< 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{x-6}{x-4} + \log_2 x &< \log_2 2^2 \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{x(x-6)}{x-4} &< \log_2 4 \\ \Leftrightarrow \frac{x(x-6)}{x-4} &< 4 \\ \Leftrightarrow x(x-6) &< 4(x-4) \quad (\because x > 6) \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x-8)(x-2) &< 0 \\ \therefore 2 &< x < 8\end{aligned}$$

となる。これに、 $x > 6$ を合わせて $6 < x < 8$ となる。

(4)

タイルをはみ出すことなく、隙間なく並べるから、幅が1のタイルを5枚と幅が2のタイルを5枚並べる場合、幅が1のタイルを3枚と幅が2のタイルを6枚並べる場合が存在する。それぞれの場合について、場合分けをして考える。

[1] 幅が1のタイルを5枚と幅が2のタイルを5枚並べる場合

それぞれの行について、幅が2のタイルは最大2枚までしか並べられない。よって、幅が2のタイルを2枚並べる行が2つ、幅が2のタイルを1枚並べる行が1つある。ここで、幅が2のタイルを1枚並べる行の選び方が3通り存在する。次に幅が2のタイルを2枚並べる行において、その並べ方はそれぞれ3通り存在する。幅が2のタイルを1枚並べる行では並べ方が4通り存在する。これより、タイルの並べ方は

$$3 \cdot 3^2 \cdot 4 = 108 \text{ (通り)}$$

となる。

[2] 幅が1のタイルを3枚と幅が2のタイルを6枚並べる場合

それぞれの行について、幅が2のタイルは最大2枚までしか並べられないから、全ての行で幅が2のタイルを2枚並べる。それぞれの行でタイルの並べ方は3通り存在するから、タイルの並べ方は

$$3^3 = 27 \text{ (通り)}$$

となる。

以上、[1], [2]より、求める並べ方は

$$108 + 27 = 135 \text{ (通り)}$$

となる。

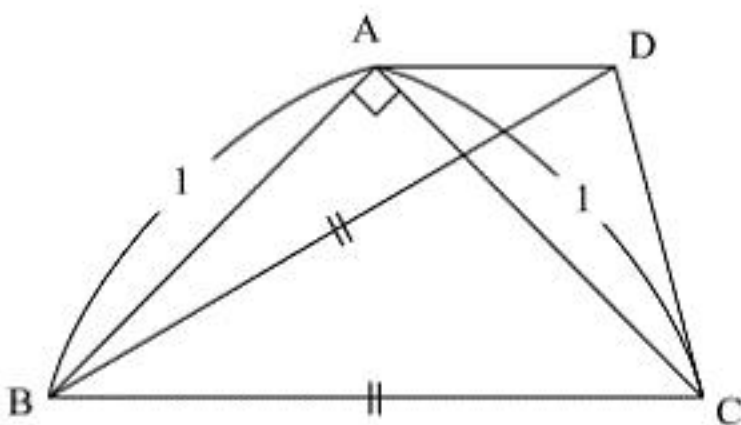
〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ
	4	5	1	2
(2)	オ	カ	キ	
	4	2	3	
(3)	ク	ケ	コ	サ
	7	5	2	3

〔解説〕

(1)



△ABCは∠CABが直角の直角二等辺三角形である。よって、 $\angle BCA = 45^\circ$ となる。ここで、 $AD \parallel BC$ であるから、錯角によって $\angle DAC = \angle BCA = 45^\circ$ となる。したがって

$$\begin{aligned}\angle DAB &= \angle CAB + \angle DAC \\ &= 90^\circ + 45^\circ \\ &= 135^\circ\end{aligned}$$

となる。また、△ABCが直角二等辺三角形であるから、 $BC = \sqrt{2}$ である。BD = BCより、 $BD = \sqrt{2}$ である。以上の条件を用いて、△ABDにおいて正弦定理より、

$$\begin{aligned}\frac{BD}{\sin \angle DAB} &= \frac{AB}{\sin \angle BDA} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ} &= \frac{1}{\sin \angle BDA} \\ \Leftrightarrow \sin \angle BDA &= \frac{\sin 135^\circ}{\sqrt{2}} \\ \therefore \sin \angle BDA &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。錯角によって $\angle BDA = \angle DBC$ となるから、

$$\sin \angle DBC = \frac{1}{2}$$

となる。

(2)

$$\sin \angle DBC = \frac{1}{2}, \angle DBC < \angle ABC = 45^\circ \text{ であるから,}$$

$$\angle DBC = 30^\circ$$

となる。これより、△BCDにおいて余弦定理を利用して、

$$\begin{aligned}CD^2 &= BC^2 + DB^2 - 2 \cdot BC \cdot DB \cdot \cos \angle DBC \\ &= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 4 - 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

(3)

△BCDは∠DBCを頂角とする二等辺三角形であるから、

$$\begin{aligned}\angle DCB &= \frac{180^\circ - \angle DBC}{2} \\ &= \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} \\ &= 75^\circ\end{aligned}$$

となる。ここで、 $CD^2 = 4 - 2\sqrt{3}$ であるから、

$$CD = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$$

となる。 $\angle BCA = 45^\circ$ より、 $\angle ACD = 30^\circ$ であるから、△ACDにおいて余弦定理を利用して、

$$\begin{aligned}AD^2 &= AC^2 + CD^2 - 2 \cdot AC \cdot CD \cdot \cos \angle ACD \\ &= 1^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	0	2	4	8
(2)	オ	カ	キ	
	2	7	2	
(3)	ク	ケ		
	5	9		
(4)	コ	サ		
	4	5		

【解答】

(1)

関数 $f(x)=-x^3-3x^2+2x+8$ を x で微分すると

$$f'(x)=-3x^2-6x+2$$

となるから、

$$f(-2)=-(-2)^3-3\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)+8=0$$

$$f'(-2)=-3\cdot(-2)^2-6\cdot(-2)+2=2$$

である。よって $y=f(x)$ 上の点 $(-2, 0)$ における接線の傾きは2であり、 ℓ_1 の方程式は

$$y=2\{x-(-2)\}$$

$$\Leftrightarrow y=2x+4$$

となる。 ℓ_2 は ℓ_1 と平行であるから、 ℓ_2 の傾きは2である。よって ℓ_2 の接点の x 座標は

$$-3x^2-6x+2=2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+6x=0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0, -2$$

より、 $x=0$ となる。 $f(0)=8$ であるから、 ℓ_2 の方程式は

$$y=2x+8$$

となる。

(2)

ℓ_1 と $y=f(x)$ を連立して、

$$-x^3-3x^2+2x+8=2x+4$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2(x-1)=0$$

$$\therefore x=-2, 1$$

となるから、 ℓ_1 と $y=f(x)$ の交点の x 座標は $x=-2, 1$ である。また、 ℓ_1 において $-2<x<1$ の

とき

$$-x^3-3x^2+2x+8-(2x+4)=-x^3-3x^2+4$$

$$=-(x+2)^2(x-1)$$

$$>0\ (\because -2<x<1)$$

となり、 $-2<x<1$ の範囲では、 $y=f(x)$ は ℓ_1 に対して y 軸正の側に存在する。次に ℓ_2 と

$y=f(x)$ を連立して、

$$-x^3-3x^2+2x+8=2x+8$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+3)=0$$

$$\therefore x=0, -3$$

となるから、 ℓ_2 と $y=f(x)$ の交点の x 座標は $x=0, -3$ である。また、 ℓ_2 において $-3<x<0$ の

とき

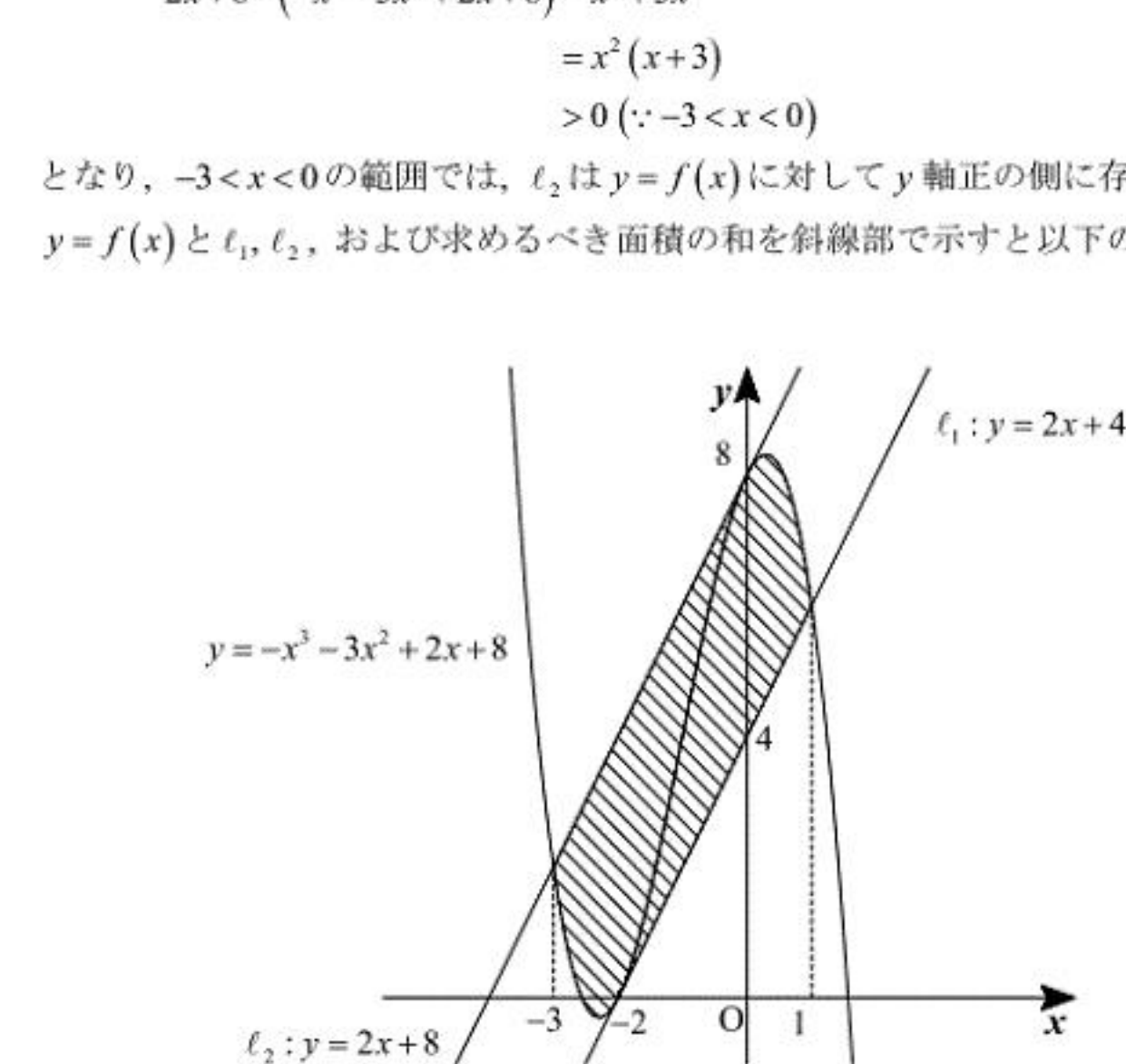
$$2x+8-(-x^3-3x^2+2x+8)=x^3+3x^2$$

$$=x^2(x+3)$$

$$>0\ (\because -3<x<0)$$

となり、 $-3<x<0$ の範囲では、 ℓ_2 は $y=f(x)$ に対して y 軸正の側に存在する。よって、

$y=f(x)$ と ℓ_1, ℓ_2 、および求めるべき面積の和を斜線部で示すと以下ようになる。



これより、求める面積は

$$\int_{-2}^1 \{(-x^3-3x^2+2x+8)-(2x+4)\} dx + \int_{-3}^0 \{2x+8-(-x^3-3x^2+2x+8)\} dx$$

$$= -\int_{-2}^1 (x+2)^2(x-1) dx + \int_{-3}^0 (x^3+3x^2) dx$$

$$= -\int_{-2}^1 (x^3+3x^2-4) dx + \int_{-3}^0 (x^3+3x^2) dx$$

$$= -\left[\frac{1}{4}x^4+x^3-4x\right]_{-2}^1 + \left[\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_{-3}^0$$

$$= \frac{27}{4} + \frac{27}{4}$$

$$= \frac{27}{2}$$

となる。

(3)

ℓ_3 の傾きを m とすると、 $f'(x)=m$ となる x の値が1つしか存在しない場合に題意を満たす。

よって、

$$-3x^2-6x+2=m$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+6x+(m-2)=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の解が1つになればよい。よって、 $\textcircled{1}$ の式の判別式を D とすると、 $D=0$ となればよい。これ

より、

$$D=0$$

$$\Leftrightarrow 6^2-4\cdot 3\cdot(m-2)=0$$

$$\Leftrightarrow 60-12m=0$$

$$\therefore m=5$$

となる。このとき、 $\textcircled{1}$ の解は

$$3x^2+6x+3=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2=0$$

$$\therefore x=-1$$

であるから、 ℓ_3 の接点の x 座標は $x=-1$ となる。これより、 ℓ_3 の方程式は

$$y=5(x+1)+f(-1)$$

$$\Leftrightarrow y=5x+9$$

となる。

(4)

$g(x)=x^4+2x^3-12x^2+5x-7$ の導関数および2階導関数は

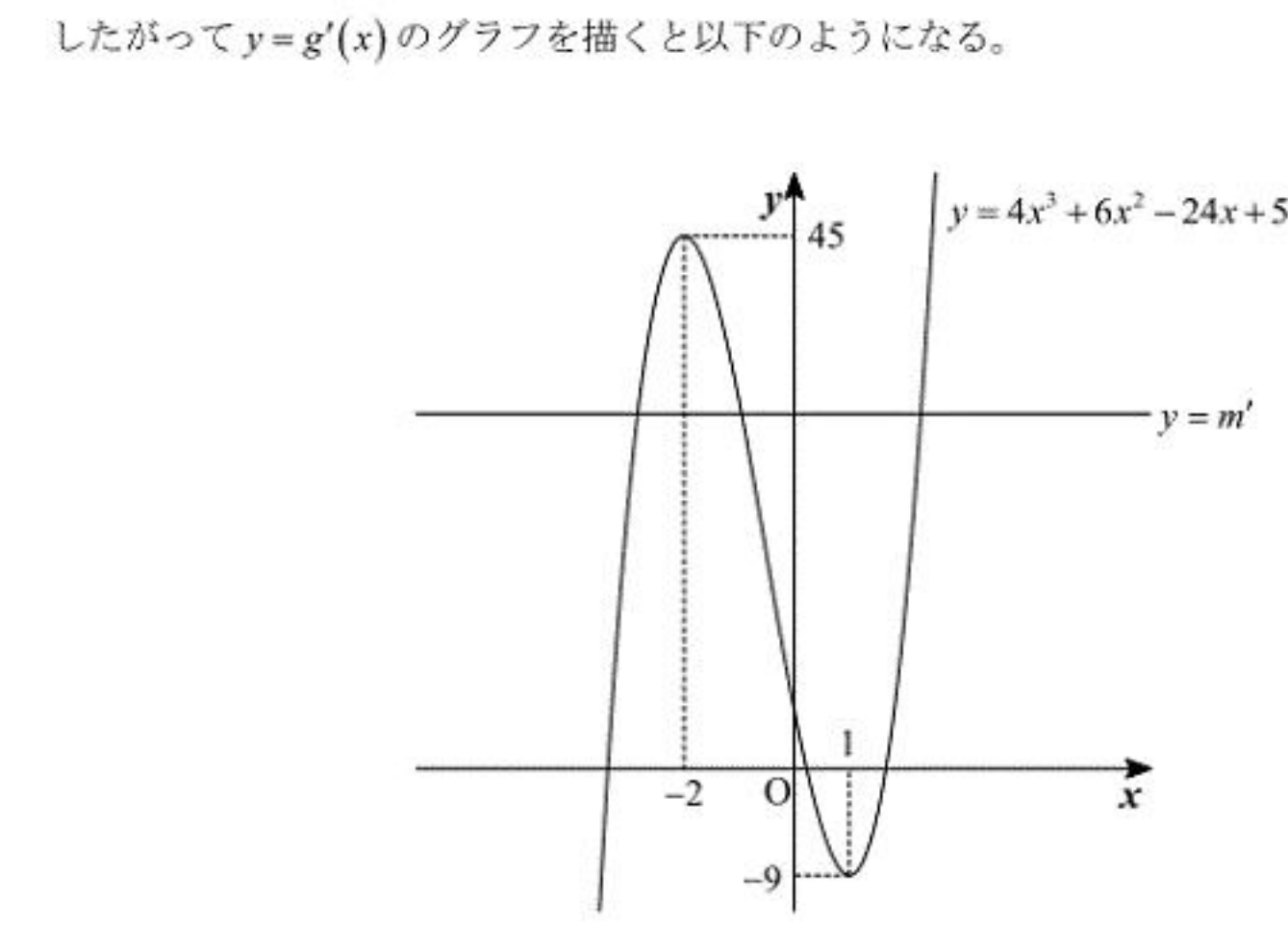
$$g'(x)=4x^3+6x^2-24x+5$$

$$g''(x)=12x^2+12x-24=12(x+2)(x-1)$$

である。よって、 $g'(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって $y=g'(x)$ のグラフを描くと以下ようになる。



ここで極大値、極小値を求めると、

$$g'(-2)=4\cdot(-2)^3+6\cdot(-2)^2-24\cdot(-2)+5=45$$

$$g'(1)=4\cdot 1^3+6\cdot 1^2-24\cdot 1+5=-9$$

である。接線の傾きを m' とすると、 $g'(x)=m'$ の解が2つ以上存在するとき、つまり

$y=g'(x)$ と直線 $y=m'$ の交点が2つ以上存在するときに条件を満たす。よって上図より、条

件を満たす m' の最大値は45となる。