

【Ⅰ】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ
1	2	7	1	0

【解説】

$f(0)=g(0)=0, f(1)=g(1)=1$ であり、 $0 \leq x \leq 1$ のとき $y=f(x)$ のグラフは下に凸となり、
 $y=g(x)$ のグラフは上に凸であるから、 $f(x) \leq g(x)$ となる。 $x \geq 1$ のとき、 $f(x) \geq 1$ であり、
 $-1 \leq g(x) \leq 1$ であるから、 $f(x) \geq g(x)$ となる。次に $x \geq 0$ において、 $F(x)$ について考える。
 $0 \leq x \leq 1$ のとき、 $f(x) \leq g(x)$ より $f(x)-g(x) \leq 0$ であるから

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} \\ &= \frac{f(x)+g(x)-\{-(f(x)-g(x))\}}{2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

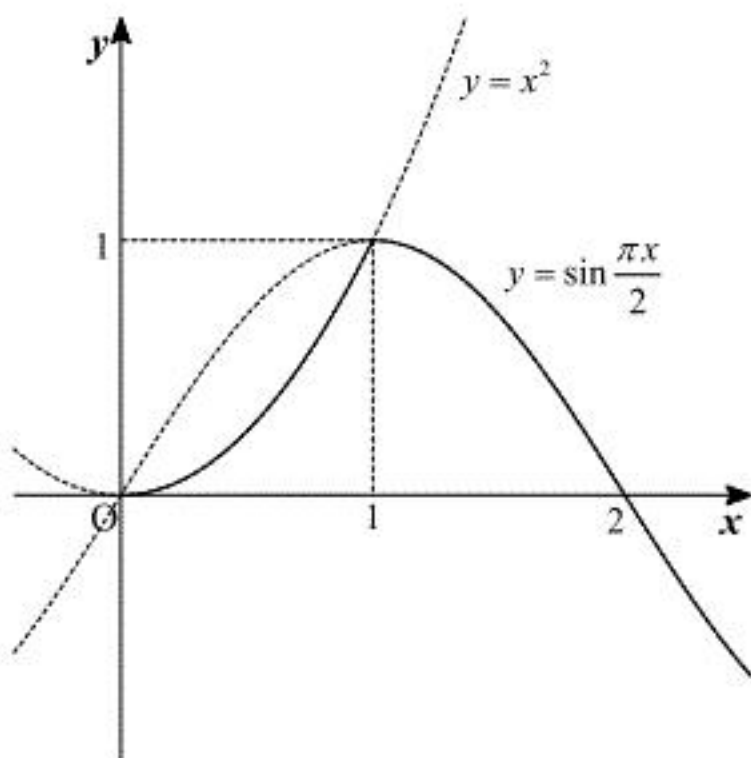
となる。また、 $x \geq 1$ のとき、 $f(x) \geq g(x)$ より $f(x)-g(x) \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} \\ &= \frac{f(x)+g(x)-(f(x)-g(x))}{2} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x \leq 1) \\ g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

となる。したがって、 $y=F(x)$ のグラフは以下のようになる。



$0 < x \leq 1$ では、 $f(x) > 0$ であるから、 $x \geq 1$ の範囲で $g(x)=0$ となる最小の正の数 x を考える。
ここで、整数 n を用いて

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi x}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} &= n\pi \\ \Leftrightarrow x &= 2n \end{aligned}$$

となるから、最小の x の値は $x=2$ である。以上を利用して、区間 $0 \leq x \leq 2$ の範囲で、
 $y=F(x)$ と x 軸で囲まれた図形を、 x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積は、

$$\begin{aligned} \pi \int_0^2 \{F(x)\}^2 dx &= \pi \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx + \pi \int_1^2 \{g(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 x^4 dx + \pi \int_1^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2} dx \\ &= \pi \int_0^1 x^4 dx + \pi \int_1^2 \frac{1-\cos \pi x}{2} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 + \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2\pi} \sin \pi x \right]_1^2 \\ &= \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{7}{10} \pi \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
8	0	3	6	0	2	0	3	9	6	3

〔解説〕

z_1, z_2, z_3 が同一直線上に存在するとき、

$$\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 0, \pi$$

となる。この角を θ とすると、 $z_1 \neq z_2$ であれば、

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|} (\cos \theta + i \sin \theta) = \pm \frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|}$$

となり、これは $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ が実数となることを表す。次に $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ が実数となるとき、

$$\arg(z_3 - z_1) = \alpha, \arg(z_2 - z_1) = \beta$$

とすると、実数 k を用いて

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = k$$

と書ける。 k の値で場合分けをして考える。

[1] $k = 0$ のとき

このとき

$$z_1 = z_3$$

となり、 z_1, z_2, z_3 が同一直線上に存在する。

[2] $k < 0$ のとき

このとき

$$|z_3 - z_1| = -k |z_2 - z_1|$$

である。よって

$$\alpha = \beta + \pi$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \pi$$

となり、 z_1, z_2, z_3 が同一直線上に存在する。

[3] $k > 0$ のとき

このとき

$$|z_3 - z_1| = k |z_2 - z_1|$$

である。よって

$$\alpha = \beta$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 0$$

となり、 z_1, z_2, z_3 が同一直線上に存在する。

以上、[1], [2], [3] より、 $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ が実数となるとき z_1, z_2, z_3 が同一直線上に存在する。したがっ

て、 $z_1 \neq z_2$ のとき、 z_1, z_2, z_3 が同一直線上にあることと、 $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ が実数となることは同値で

ある。これを利用すると、 $1, z, z^4$ が同一直線上に存在するとき、 $\frac{z^4 - 1}{z - 1} = z^3 + z^2 + z + 1$ が実数

となる。よって、

$$\begin{aligned} z^3 + z^2 + z + 1 &= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i + x^2 + 2xyi - y^2 + x + yi + 1 \\ &= (x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 + x + 1) + (3x^2y - y^3 + 2xy + y)i \end{aligned}$$

となり、これが実数であるから、 $3x^2y - y^3 + 2xy + y = 0$ となる。これは、

$$3x^2y - y^3 + 2xy + y = 0$$

$$\Leftrightarrow y(3x^2 - y^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ または } 3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$$

となる。よって、 $A = 3, B = -1, C = 0, D = 2, E = 0$ となる。 $y = 0$ は原点を通る直線であり、

$3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$ は

$$3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - y^2 + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{2}{9}} - \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = -1$$

より、双曲線を表す。ここで、点 (x, y) が $3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$ の表す図形上を動くとき、

$$y^2 = 3x^2 + 2x + 1$$

$$= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

より、 $x = -\frac{1}{3}$ のとき y^2 は最小値 $\frac{2}{3}$ をとる。したがって、 $|y|$ の最小値は $x = -\frac{1}{3}$ のとき、

$$|y| = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

となる。

【Ⅲ】

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
4	7	1	5	2	6	1	2	4	3

〔解説〕

関数 $f(x)=\frac{\log x}{x^2}$ を x で微分すると

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\log x}{x^3}$$

である。 $x>0$ の範囲で $x^3>0$ であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\sqrt{e}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			極大	

増減表より、 $f(x)$ は $x=\sqrt{e}$ で最大値をとり、その値は

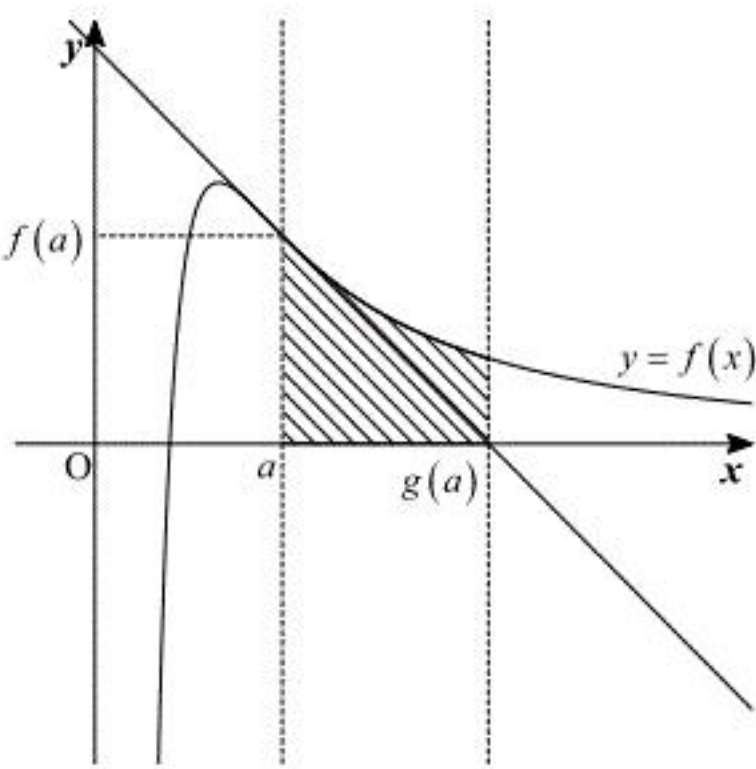
$$f(\sqrt{e})=\frac{\log(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2}=\frac{1}{2e}$$

となる。さらに、 $f(x)$ の不定積分は C を積分定数として、部分積分を用いると

$$\begin{aligned}\int\frac{\log x}{x^2}dx&=\int\log x\left(-\frac{1}{x}\right)'dx\\&=\log x\left(-\frac{1}{x}\right)-\int(\log x)'\left(-\frac{1}{x}\right)dx\\&=-\frac{\log x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx\\&=-\frac{\log x+1}{x}+C\end{aligned}$$

となる。 $a>\sqrt{e}$ に対して、点 $P(a, f(a))$ における接線と点 $Q(g(a), 0)$ 、曲線 $y=f(x)$ と x 軸

および2直線 $x=a, x=g(a)$ で囲まれた図形を図示すると以下の斜線部ようになる。



面積 S は、 $g(a)=a(1+h(a))$ を用いて、

$$\begin{aligned}S&=\int_a^{g(a)}\frac{\log x}{x^2}dx\\&=\left[-\frac{\log x+1}{x}\right]_a^{g(a)}\\&=-\frac{\log\{g(a)\}+1}{g(a)}+\frac{\log a+1}{a}\\&=-\frac{\log\{a(1+h(a))\}+1}{a(1+h(a))}+\frac{\log a+1}{a}\\&=\frac{-\log\{a(1+h(a))\}-1+(\log a+1)(1+h(a))}{a(1+h(a))}\\&=\frac{h(a)(\log a+1)-\log(1+h(a))}{a(1+h(a))}\end{aligned}$$

となる。ここで、点 P における接線の方程式は、

$$\begin{aligned}y&=f'(a)(x-a)+f(a)\\&\Leftrightarrow y=\frac{1-2\log a}{a^3}(x-a)+\frac{\log a}{a^2}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}0&=\frac{1-2\log a}{a^3}(g(a)-a)+\frac{\log a}{a^2}\\&\Leftrightarrow g(a)-a=-\frac{\log a}{a^2}\cdot\frac{a^3}{1-2\log a}\\&\therefore g(a)=a\left(1+\frac{\log a}{2\log a-1}\right)\end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}\lim_{a\rightarrow\infty}h(a)&=\lim_{a\rightarrow\infty}\left(\frac{g(a)}{a}-1\right)\\&=\lim_{a\rightarrow\infty}\frac{\log a}{2\log a-1}\\&=\lim_{a\rightarrow\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{\log a}}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。また、

$$T=\frac{h(a)\log a}{2a}$$

であるから、これらを利用して、

$$\begin{aligned}\lim_{a\rightarrow\infty}\frac{S}{T}&=\lim_{a\rightarrow\infty}\frac{\frac{h(a)(\log a+1)-\log(1+h(a))}{a(1+h(a))}}{\frac{h(a)\log a}{2a}}\\&=\lim_{a\rightarrow\infty}2\cdot\frac{h(a)(\log a+1)-\log(1+h(a))}{h(a)\log a(1+h(a))}\\&=\lim_{a\rightarrow\infty}2\cdot\frac{h(a)\left(1+\frac{1}{\log a}\right)-\frac{\log(1+h(a))}{\log a}}{h(a)(1+h(a))}\\&=2\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)}\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

となる。

【Ⅳ】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
0	8	4	4	9	3	0	5	1

【解説】

x 座標が $\theta - \sin \theta$ である E 上の点の y 座標の 2 乗を $f(\theta)$ として、 $f(\theta)$ について整理すると、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= y^2 \\ &= 4 \left\{ 1 - \frac{(x - \pi)^2}{\pi^2} \right\} \\ &= \frac{-4x^2 + 8x\pi}{\pi^2} \\ &= \frac{-4(\theta - \sin \theta)^2 + 8\pi(\theta - \sin \theta)}{\pi^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\theta = \pi$ のとき、

$$x = \pi - \sin \pi = \pi$$

であるから、

$$f(\pi) = \frac{-4\pi^2 + 8\pi \cdot \pi}{\pi^2} = 4$$

となり、

$$\begin{aligned} g(\pi) &= (1 - \cos \pi)^2 - f(\pi) \\ &= 2^2 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。また、 $x = \theta - \sin \theta$ より $\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta$ であるから、 $g(\theta)$ を θ で微分すると

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= 2(1 - \cos \theta) \sin \theta - f'(\theta) \\ &= 2(1 - \cos \theta) \sin \theta - \left\{ \frac{-8(\theta - \sin \theta)(1 - \cos \theta) + 8\pi(1 - \cos \theta)}{\pi^2} \right\} \\ &= \frac{2(1 - \cos \theta)}{\pi^2} \{ \pi^2 \sin \theta + 4(\theta - \sin \theta - \pi) \} \\ &= \frac{2(1 - \cos \theta)}{\pi^2} \{ (\pi^2 - 4) \sin \theta + 4(\theta - \pi) \} \end{aligned}$$

となる。よって $h(\theta)$ は

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \frac{\pi^2 g'(\theta)}{2(1 - \cos \theta)} \\ &= (\pi^2 - 4) \sin \theta + 4(\theta - \pi) \end{aligned}$$

となる。 $h(\theta)$ を θ で微分すると、

$$h'(\theta) = (\pi^2 - 4) \cos \theta + 4$$

となり、 $\cos \theta$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で単調減少するから、 $h'(\alpha) = 0$ かつ $0 < \alpha < \pi$ となる α はただ 1 つであり、

$$\begin{aligned} h'(\alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\pi^2 - 4) \cos \alpha + 4 &= 0 \\ \therefore \cos \alpha &= \frac{4}{4 - \pi^2} \end{aligned}$$

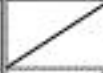
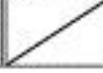
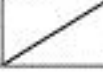
となる。また、

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +0} h(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \{ (\pi^2 - 4) \sin \theta + 4(\theta - \pi) \} = -4\pi \\ \lim_{\theta \rightarrow \pi - 0} h(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow \pi - 0} \{ (\pi^2 - 4) \sin \theta + 4(\theta - \pi) \} = 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \theta < \alpha$ の範囲では $h'(\theta) > 0$ であるから、 $h(\theta)$ は単調増加する。また、 $\alpha < \theta < \pi$ の範囲では $h'(\theta) < 0$ であるから、 $h(\theta)$ は単調減少する。さらに、

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} h(\theta) = -4\pi, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi - 0} h(\theta) = 0 \text{ であるから } h(\alpha) > 0 \text{ となり、} 0 < \beta < \alpha \text{ かつ } h(\beta) = 0 \text{ を満たす}$$

β がただ 1 つ存在する。よって $h(\theta)$ の増減表を書くと以下ようになる。

θ	0	...	β	...	α	...	π
$h'(\theta)$		+	+	+	0	-	
$h(\theta)$			0		極大		

極限值と増減表より、 $h(\theta)$ は $0 < \theta < \beta$ で負の値をとり、 $\beta < \theta < \pi$ で正の値をとる。 $h(\theta)$ と $g'(\theta)$ の関係は

$$h(\theta) = \frac{\pi^2 g'(\theta)}{2(1 - \cos \theta)}$$

より、 $0 < \theta < \pi$ の範囲で $1 - \cos \theta > 0$ であるから $h(\theta)$ と $g'(\theta)$ の符号は一致する。よって $g(\theta)$ は区間 $[0, \beta]$ で減少し、区間 $[\beta, \pi]$ で増加する。これと $g(0) = g(\pi) = 0$ であることから、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で、 $g(\theta) \leq 0$ となる。さらに、 $g(\theta) = g(2\pi - \theta)$ であるから、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の

範囲で、 $g(\theta) \leq 0$ と分かる。よって、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で $(1 - \cos \theta)^2 \leq f(\theta)$ となる。

$(1 - \cos \theta)^2$ は $x = \theta - \sin \theta$ における C 上の点の y 座標の 2 乗であり、 $f(\theta)$ は $x = \theta - \sin \theta$ における E 上の点の y 座標の 2 乗であるから、 C 上の点は楕円 E で囲まれた部分につねに属する。