

【Ⅰ】

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
1	9	1	0	⑧	1	1	7

〔解説〕

(1)

まず、第 n 項の分母を計算すると、

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

となる。以上より、 $n=19$ のとき、与式は、

$$2 \left(1 - \frac{1}{20} \right) = \frac{19}{10}$$

である。

(2)

$y=W(x)$ を x について解くと、逆関数の定義より、 $x=ye^y$ ($y \geq -1$) となる。ここで、直線 $y=ex$ と曲線 $y=W(x)$ の交点の y 座標は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e}y = ye^y \\ & \Leftrightarrow y(1-e^{y+1}) = 0 \\ & \Leftrightarrow y = 0, -1 \end{aligned}$$

である。また、区間 $-1 \leq y \leq 0$ において、

$$\frac{1}{e}y - ye^y = \frac{1}{e}y(1-e^{y+1}) \geq 0$$

が成立する。したがって、求める図形の面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{e}y - ye^y \right) dy &= \left[\frac{1}{2e}y^2 \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 y(e^y)' dy \\ &= -\frac{1}{2e} - [ye^y]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^y dy \\ &= -\frac{1}{2e} - \frac{1}{e} + [e^y]_{-1}^0 \\ &= -\frac{3}{2e} + 1 - \frac{1}{e} \\ &= 1 - \frac{5}{2e} \end{aligned}$$

となる。

(3)

まず、 $x+y+z=20$ より、 $x+y=20-z$, $y+z=20-x$, $z+x=20-y$ が成立する。したがって、

$$\begin{aligned} & (x+y)(y+z)(z+x) = 0 \\ & \Leftrightarrow (20-z)(20-x)(20-y) = 0 \end{aligned}$$

となり、条件を満たすとき、「 $x=20$ 」または「 $y=20$ 」または「 $z=20$ 」となる。

[1] $x=20$ の場合

$y+z=0$, $|y| \leq 20$, $|z| \leq 20$, $yz \neq 0$ より、解は $(x, y, z) = (20, k, -k)$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 20$) となる。

[2] $y=20$ の場合

$z+x=0$, $|z| \leq 20$, $|x| \leq 20$, $zx \neq 0$ より、解は $(x, y, z) = (-k, 20, k)$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 20$) となる。

[3] $z=20$ の場合

$x+y=0$, $|x| \leq 20$, $|y| \leq 20$, $xy \neq 0$ より、解は $(x, y, z) = (k, -k, 20)$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 20$) となる。

以上[1], [2], [3]より、重複する解 $(x, y, z) = (20, 20, -20), (20, -20, 20), (-20, 20, 20)$ に注意すると、解は、

$$40 \times 3 - 3 = 117 \text{ (個)}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

サ	シ	ス	セ	ソ
4	2	1	5	2
あ				
$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$				

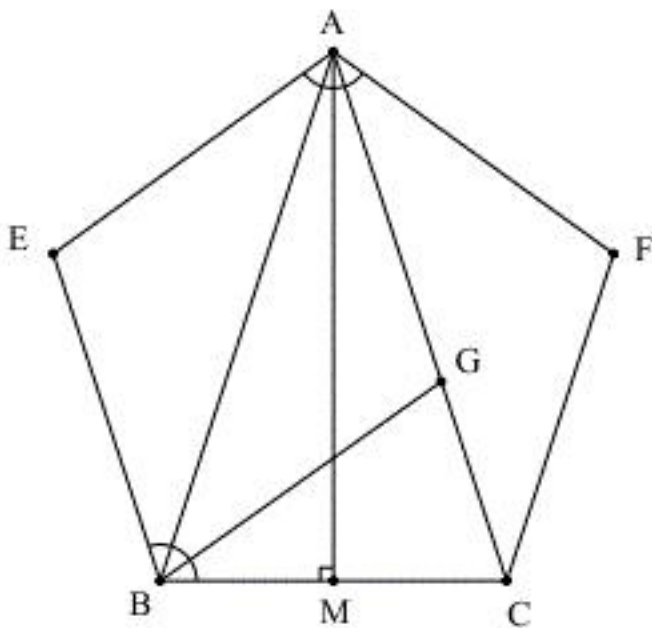
〔解説〕

(1)

与えられた平面で正十二面体 K を切断すると、正十二面体 K の辺を 2 本と、面の頂点と対辺の中点とを結んだ線分が 4 本で結ばれた切り口となる。したがって、周の長さは $4\ell+2$ と表される。

(2)

3 点 A, B, C を含む正十二面体 K の面を考える。各頂点は以下のような位置関係である。



まず、 $\angle AEB = \frac{3}{5}\pi$ かつ $AE = BE$ より、 $\angle BAE = \frac{1}{5}\pi$ である。同様に、 $\angle CAF = \frac{1}{5}\pi$ であるため、

$\angle BAC = \frac{3}{5}\pi - 2 \times \frac{1}{5}\pi = \frac{1}{5}\pi$ である。ここで、 $\angle ABC$ の角の二等分線と線分 AC の交点を G とす

ると、 $\angle BAC = \angle CBG = \frac{1}{5}\pi$ かつ $AB = AC, BC = BG$ が成り立つため、 $\triangle ABC$ と $\triangle BCG$ は相

似である。また、 $\angle BAG = \angle ABG = \frac{1}{5}\pi$ より、 $\triangle ABG$ は二等辺三角形であり、 $AG = BG$ とな

る。 $x = AB$ とおくと、相似比の関係より、

$$AB : BC = BC : CG$$

$$\Leftrightarrow x : 1 = 1 : x - 1$$

$$\therefore x(x - 1) = 1$$

となる。方程式を解くと、 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\because x > 0$) であるため、 $AB = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

(3)

$\triangle ABM$ について、三平方の定理より、

$$AM^2 = AB^2 - BM^2$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned} \ell &= \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2 - 1}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} \end{aligned}$$

となる。

【Ⅲ】

【解答】

か	き	く	け
$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n$	$\frac{s(b^2-s)}{b^2c^2-s^2}$	$\frac{s(c^2-s)}{b^2c^2-s^2}$

【解説】

- (1) $|\alpha|=1$ であるため、 $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ ($0\leq\theta<2\pi$) と表すことができる。ド・モアブルの定理を用いて与式の左辺を変形すると、

$$\begin{aligned}\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1 &= (\cos 3\theta+i\sin 3\theta)+(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+(\cos\theta+i\sin\theta)+1 \\ &= (\cos 3\theta+\cos 2\theta+\cos\theta+1)+i(\sin 3\theta+\sin 2\theta+\sin\theta)\end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=-\sqrt{3}i$ を満たすとき、実部・虚部を比較して、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta+\cos 2\theta+\cos\theta+1 &= 0 && \cdots \text{①} \\ \sin 3\theta+\sin 2\theta+\sin\theta &= -\sqrt{3} && \cdots \text{②}\end{aligned}$$

が成立する。3倍角、2倍角の公式を適用して①を解くと、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta+\cos 2\theta+\cos\theta+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (4\cos^3\theta-3\cos\theta)+(2\cos^2\theta-1)+\cos\theta+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos^3\theta+2\cos^2\theta-2\cos\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos\theta(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos\theta &= 0, -1, \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi\end{aligned}$$

となる。ここで、②を満たすのは $\theta=\frac{5}{3}\pi$ である。したがって、 $\alpha=\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ である。

- (2)

2つの目の積が偶数である確率は、少なくとも1つの目が偶数である確率であり $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$,

2つの目の積が奇数である確率は $\frac{1}{4}$ である。また、2つの目の積が偶数であり和が偶数である確率は、2つの目がともに偶数である確率であり $\frac{1}{4}$ 、2つの目の積が奇数であり和が偶数である確率は、2つの目がともに奇数である確率であり $\frac{1}{4}$ である。 k 回目($k=1,\dots,n$)のさいころ投げで2つの目の積が偶数となり試行が終了し、かつ2つの目の合計が偶数である確率を $p(k)$ とおくと、

$$p(k)=\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

と表される。また、 n 回の振り直しによって、振り直しの上限に達し試行を終了するとき、さいころは合計で $(n+1)$ 回振っていることに注意して、 $(n+1)$ 回目のさいころ投げで試行が終了し、かつ2つの目の合計が偶数である確率を求めると、

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

である。これらはすべて排反であるため、求める確率は、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n &= \frac{1}{4}\frac{\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n\end{aligned}$$

となる。

- (3)

垂心の定義より $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ および $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ が成立する。また、3点A, B, Cが三角形をなすことから、A, B, Cは同一直線上にはないから、

$$\begin{aligned}-|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|&<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}| \\ \Leftrightarrow s^2 &<b^2c^2\end{aligned}$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{\left(p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AB}\right\}\cdot\overrightarrow{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow (p-1)s+qb^2 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{\left(p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AC}\right\}\cdot\overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow pc^2+(q-1)s &= 0\end{aligned}$$

となる。 $(p-1)s+qb^2=0$ と $pc^2+(q-1)s=0$ を連立して解くと、 $b^2c^2-s^2>0$ であったから、

$$p=\frac{s(b^2-s)}{b^2c^2-s^2}, \quad q=\frac{s(c^2-s)}{b^2c^2-s^2}$$

となる。

[IV]

(1)

$$f = \sum_{j=1}^n \left\{ (x_j - \bar{x}) + k(y_j - \bar{y}) \right\}^2 \text{ とおくと, } f \geq 0 \text{ が成立する. また, 展開すると,}$$

$$f = \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 + 2k \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) + k^2 \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 \text{ となる. } f = 0 \text{ を } k \text{ に関する 2 次関数と}$$

みなすと, $f \geq 0$ より, 判別式 D に関して, $\frac{D}{4} \leq 0$ が成立する. したがって,

$$\left\{ \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) \right\}^2 - \left\{ \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 \right\} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}$$

$$\Leftrightarrow |ns_{xy}| \leq ns_x s_y$$

$$\Leftrightarrow -s_x s_y \leq s_{xy} \leq s_x s_y \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

が成立する. ここで, $x_1 < x_2 < x_3$ および $y_1 < y_2 < y_3$ から,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} < x_3 \text{ かつ } \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} < y_3$$

$$\Leftrightarrow x_3 - \bar{x} > 0 \text{ かつ } y_3 - \bar{y} > 0$$

$$\Leftrightarrow s_x > 0 \text{ かつ } s_y > 0$$

が成立するため, ①の辺々を $s_x s_y$ で割ると,

$$\Leftrightarrow -1 \leq r \leq 1$$

が得られる.

(証明終)

(2)

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \text{ であり, } s_x > 0, s_y > 0 \text{ であることから, } r > 0 \Leftrightarrow s_{xy} > 0 \text{ である. よって, 以下では}$$

$$s_{xy} > 0 \text{ であることを示す. 条件より,}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = 0, \bar{y} = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) = 0$$

であることから,

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

$$= \frac{1}{3}(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$$

が得られる. また,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1 - x_3, y_1 + y_2 + y_3 = 0 \Leftrightarrow y_2 = -y_1 - y_3$$

であるから,

$$s_{xy} = \frac{1}{3}(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$$

$$= \frac{1}{3}\{x_1 y_1 + (-x_1 - x_3)(-y_1 - y_3) + x_3 y_3\}$$

$$= \frac{1}{3}\{(2x_1 + x_3)y_1 + (x_1 + 2x_3)y_3\}$$

と変形できる. ここで, $0 \leq x_1$ または $x_3 \leq 0$ とすると, $x_1 < x_2 < x_3$ より, $x_1 + x_2 + x_3 \neq 0$ となるため, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ を満たすとき, $x_1 < 0$ かつ $0 < x_3$ である. また, 同様に考えることで, $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ を満たすとき, $y_1 < y_2 < y_3$ より, $y_1 < 0$ かつ $0 < y_3$ である. このとき,

$$x_1 < x_2 < x_3$$

$$\Leftrightarrow x_1 < -x_1 - x_3 < x_3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_1 < x_3 < -2x_1$$

$$\therefore 0 < x_1 + 2x_3$$

$$y_1 < y_2 < y_3$$

$$\Leftrightarrow y_1 < -y_1 - y_3 < y_3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}y_1 < y_3 < -2y_1$$

$$\therefore 0 < -\frac{1}{2}y_1 < y_3$$

が成立するから,

$$s_{xy} = \frac{1}{3}\{(2x_1 + x_3)y_1 + (x_1 + 2x_3)y_3\}$$

$$> \frac{1}{3}\left\{(2x_1 + x_3)y_1 + (x_1 + 2x_3)\left(-\frac{1}{2}y_1\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x_1 y_1$$

$$= \frac{1}{2} x_1 y_1$$

$$> 0 \text{ (} \because x_1 < 0, y_1 < 0 \text{)}$$

が得られる. 以上より, $r > 0$ であることが示された.

(証明終)

〔V〕

(1)

$F''(x)=0$ の両辺を x で積分すると、

$$F'(x)=C_1 \text{ (} C_1 \text{ は積分定数)}$$

と表される。ここで、 $x=1$ とすると、 $C_1=F'(1)$ となるため、

$$F'(x)=F'(1)$$

と表すことができる。この両辺を x で積分すると、

$$F(x)=F'(1)x+C_0 \text{ (} C_0 \text{ は積分定数)}$$

と表される。ここで、 $x=1$ とすると、 $C_0=F(1)-F'(1)$ となるため、

$$\begin{aligned} F(x) &= F'(1)x + F(1) - F'(1) \\ &= F'(1)(x-1) + F(1) \end{aligned}$$

が成立する。

(証明終)

(2)(a)

点 $(t, f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線は、

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

と表すことができる。したがって、接線と y 軸の交点の y 座標は、

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(0-t) + f(t) \\ &= f(t) - tf'(t) \end{aligned}$$

であるため、 $g(t)=f(t)-tf'(t)$ である。

(答) $g(t)=f(t)-tf'(t)$

(b)

$g(t)=1$ より、(a)の結果を用いると、任意の正の実数 x に対して、

$$f(x)-xf'(x)=1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。①の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x)-1 \cdot f'(x)-xf''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow xf''(x) &= 0 \end{aligned}$$

が得られ、これが任意の正の実数 x に対して成立するとき、つねに $f''(x)=0$ を満たす。したがって、(1)の結果を用いて、

$$f(x)=f'(1)(x-1)+f(1)$$

と表すことができる。ここで、①に $x=1$ を代入すると、

$$f(1)-f'(1)=1 \Leftrightarrow f'(1)=a-1$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= (a-1)(x-1) + a \\ &= (a-1)x + 1 \end{aligned}$$

と、 a, x を用いて表すことができる。

(答) $f''(x)=0, f(x)=(a-1)x+1$

(c)

$g(t)=1-t$ より、(a)の結果を用いると、任意の正の実数 x に対して、

$$f(x)-xf'(x)=1-x \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。この両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x)-1 \cdot f'(x)-xf''(x) &= -1 \\ \Leftrightarrow xf''(x) &= 1 \end{aligned}$$

となる。これが任意の正の実数 x に対して成立するとき、 $f''(x)=\frac{1}{x}$ である。この両辺を x で積分すると、

$$f'(x)=\log x + C'_1 \text{ (} C'_1 \text{ は積分定数)}$$

と表される。ここで、 $x=1$ とすると、 $C'_1=f'(1)$ となるため、

$$f'(x)=\log x + f'(1)$$

と表すことができる。②に $x=1$ を代入すると、

$$f(1)-1 \cdot f'(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)=a$$

であり、

$$f'(x)=\log x + a$$

と表すことができる。よって、②より、

$$\begin{aligned} f(x) &= xf'(x) + 1 - x \\ &= x(\log x + a) + 1 - x \\ &= x \log x + (a-1)x + 1 \end{aligned}$$

と、 a, x を用いて表すことができる。

(答) $f''(x)=\frac{1}{x}, f(x)=x \log x + (a-1)x + 1$