

国語、数学Ⅲ 問題

はじめに、これを読みなさい。

1. この冊子には、「数学Ⅲ」と「国語」の問題がおさめられている。「数学Ⅲ」は表面から 10 ページ、「国語」は裏面から 21 ページである。必要な科目を選択して解答すること。なお、表紙の次の白紙 2 ページはメモ用紙として使用してもよい。
2. 解答用紙に印刷されている受験番号が正しいかどうか、受験票と照合して確認すること。
3. 監督者の指示にしたがい、解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
4. 解答用紙の「解答科目マーク欄」にマークし、「解答科目名記入欄」に解答する科目名を記入すること。マークされていない場合、または複数の科目にマークされている場合は、この時限の科目は採点対象外となる。
5. 解答は、すべて解答用紙の所定欄にマークすること。
6. 1 つの解答欄に 2 つ以上マークしないこと。
7. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入のこと。
8. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
9. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
10. 解答用紙はすべて回収するので、持ち帰らず、必ず提出すること。
11. 問題冊子は、必ず持ち帰ること。
12. 試験時間は、60 分である。
13. (数学Ⅲ) 分数形で解答する場合は、既約分数で答えること。
14. (数学Ⅲ) 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。
15. マーク記入例

良い例	悪い例
	  

数学Ⅲ 問題

〔Ⅰ〕 次の空欄に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし、空欄

エオ

 は 2 桁の数を表す。

関数 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$$

と定める。 $0 \leq x \leq$

ア

 のとき $f(x) \leq g(x)$ であり、

ア

 $\leq x$ のとき $f(x) \geq g(x)$ である。

次に、関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

と定める。このとき、 $F(x) = 0$ となる最小の正の数 x は

イ

 である。また、区間 $0 \leq x \leq$

イ

 において、曲線 $y = F(x)$ と x 軸で囲まれた図形を、 x 軸

の周りに 1 回転させてできる立体の体積は

ウ

エオ

 π である。

(このページは計算用紙として使用してよい。)

〔Ⅱ〕 次の空欄 , , , , ,
 , , に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。なお、解答群から同じものを2回以上選んでもよい。また、それ以外の空欄に当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

以下、 i は虚数単位とする。

複素数 z_1, z_2, z_3 が表す複素数平面上の点すべてを通る直線があるとき、 z_1, z_2, z_3 は一直線上にあるという。 $z_1 = z_2$ のときは、明らかに z_1, z_2, z_3 は一直線上にある。 $z_1 \neq z_2$ のときは、 z_1, z_2, z_3 が一直線上にあることと $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ が

であることは同値である。

x と y を実数とし、 $z = x + yi$ とおく。このとき、 $1, z, z^4$ が一直線上にあることと、 x と y が次の (1) または (2) を満たすことは同値である。

$$y = \text{ } \dots\dots (1)$$

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + 1 = 0 \dots\dots (2)$$

ただし、 $A = \text{ } , B = \text{ } , C = \text{ } , D = \text{ } ,$
 $E = \text{ }$ である。したがって、 (x, y) を座標平面上の点と考えたとき、
(1) の表す図形は であり、(2) の表す図形は である。ここで、
点 (x, y) が (2) の表す図形上を動くとき、 $|y|$ の最小値は、 $\sqrt{\frac{\text{ } }{\text{ }}}$ になる。

アの解答群

- | | | | | |
|-------|---------|----------|-------|--------|
| ① 0 | ① π | ② $-\pi$ | ③ i | ④ $-i$ |
| ⑤ 純虚数 | ⑥ 自然数 | ⑦ 整数 | ⑧ 実数 | ⑨ 虚数 |

ウ, エ, オ, カ, キの解答群

- | | | | | |
|-----|------|------|------|------|
| ① 0 | ① 1 | ② 2 | ③ 3 | ④ 4 |
| ⑤ 5 | ⑥ -1 | ⑦ -2 | ⑧ -3 | ⑨ -4 |

ク、ケの解答群

- | | |
|-------------|-----------|
| ① 原点 | ① 原点でない1点 |
| ② 異なる2点 | ③ 原点を通る直線 |
| ④ 原点を通らない直線 | ⑤ 異なる2直線 |
| ⑥ 円 | ⑦ 円でない楕円 |
| ⑧ 放物線 | ⑨ 双曲線 |

〔Ⅲ〕 次の空欄 ア , イ , エ , オ , カ に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。なお、解答群から同じものを2回以上選んでもよい。それ以外の空欄には、当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

以下、 $\log$ は自然対数であり、 e はその底とする。

$x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ は、 $x =$ ア で最大値 イ をとる。また、 $f(x)$ の不定積分は、

$$\int f(x) dx = -\frac{\log x + \text{ウ}}{x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である。

$a >$ ア に対して、点 $P(a, f(a))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸との交点を $Q(g(a), 0)$ とおく。また、曲線 $y = f(x)$ と x 軸および2直線 $x = a$ 、 $x = g(a)$ で囲まれた図形の面積を S とする。 $h(a) = \frac{g(a)}{a} - 1$ とおくと $g(a) = a(1 + h(a))$ となるので、

$$S = \frac{h(a) \left(\text{エ} \right) - \log(1 + h(a))}{a(1 + h(a))}$$

と表せる。また、点 $R(a, 0)$ をとり、 $\triangle PQR$ の面積を T とおくと、

$$T = \frac{h(a) \log a}{2a}$$

である。ところで、 $g(a)$ を a で表すと $g(a) = a \left(1 + \frac{\text{オ}}{\text{カ}} \right)$ となるので

$$\lim_{a \rightarrow \infty} h(a) = \frac{\text{キ}}{\text{ク}} \text{ であり,}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S}{T} = \frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$$

となることがわかる。

ア, イの解答群

- | | | | | |
|------------------------|--------|------------------|-----------------|-----------------|
| ① $\frac{1}{2}$ | ② 1 | ③ e | ④ $\frac{1}{e}$ | ⑤ $\sqrt{e}$ |
| ⑥ $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | ⑦ $2e$ | ⑧ $\frac{1}{2e}$ | ⑨ $\frac{e}{2}$ | ⑩ $\frac{2}{e}$ |

エ, オ, カの解答群

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| ① a | ② 1 | ③ $\log a$ |
| ④ $a \log a$ | ⑤ $\log a - 1$ | ⑥ $\log a + 1$ |
| ⑦ $2 \log a - 1$ | ⑧ $2 \log a + 1$ | ⑨ $3 \log a - 1$ |
| ⑩ $3 \log a + 1$ | | |

〔IV〕 次の空欄 , , , , ,

に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。なお、解答群から同じものを2回以上選んでもよい。それ以外の空欄には、当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

座標平面において、媒介変数表示

$$x = \theta - \sin \theta, \quad y = 1 - \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で表されるサイクロイドを C とし、方程式 $\frac{(x-\pi)^2}{\pi^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ で表される楕円を E とする。 x 座標が等しい C 上の点と E 上の点の y 座標を比較するために、 x 座標が $\theta - \sin \theta$ である E 上の点の y 座標の2乗を $f(\theta)$ とし、 $g(\theta) = (1 - \cos \theta)^2 - f(\theta)$ とする。

関数 $g(\theta)$ の区間 $0 \leq \theta \leq \pi$ における増減を調べる。

$g(0) = 0$, $g(\pi) =$ である。 $0 < \theta < \pi$ に対して

$$h(\theta) = \frac{\pi^2 g'(\theta)}{2(1 - \cos \theta)}$$

とすると、 $h(\theta) =$ () $\sin \theta + 4$ () となる。 $h(\theta)$ の導関数を求めると、 $0 < \alpha < \pi$ かつ $h'(\alpha) = 0$ を満たす α がただ1つ存在して、

$\cos \alpha = \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ となることがわかる。また、 $\lim_{\theta \rightarrow +0} h(\theta) =$,

$\lim_{\theta \rightarrow \pi-0} h(\theta) =$ であるので、 $0 < \beta < \alpha$ かつ $h(\beta) = 0$ を満たす β がただ1つ存在することもわかる。したがって、関数 $g(\theta)$ は 。

以上の考察と $g(\theta) = g(2\pi - \theta)$ であることから、 $0 < \theta < 2\pi$ に対して C 上の点 $(\theta - \sin \theta, 1 - \cos \theta)$ は楕円 E で囲まれた部分 (ただし、境界線を含む) に ことがわかる。

イ、ウ、オ、カの解答群

- ① π ① $-\pi$ ② 4π ③ -4π ④ $\theta - \pi$
 ⑤ $\pi - \theta$ ⑥ $\pi - 2$ ⑦ $2 - \pi$ ⑧ $\pi^2 - 4$ ⑨ $4 - \pi^2$

クの解答群

- ① 区間 $[0, \pi]$ で増加する
- ② 区間 $[0, \alpha]$ で増加し, 区間 $[\alpha, \pi]$ で減少する
- ③ 区間 $[0, \alpha]$ で減少し, 区間 $[\alpha, \pi]$ で増加する
- ④ 区間 $[0, \beta]$ で増加し, 区間 $[\beta, \pi]$ で減少する
- ⑤ 区間 $[0, \beta]$ で減少し, 区間 $[\beta, \pi]$ で増加する

ケの解答群

- ① 属するときも属さないときもある
- ② 属する
- ③ つねに属する
- ④ つねに属さない

(次のページに計算用紙があります。)

(このページは計算用紙として使用してよい。)

(このページは計算用紙として使用してよい。)

