明治大学
総合数理学部

お

数　学　問　題

注意事項

1. この問題冊子は18ページあります。解答用紙には，「数学①」と「数学②」の２枚あり，「数学②」には表と裏があります。
2. あなたの受験番号は，２枚の解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と，受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 監督者の指示にしたがい，２枚の解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕，〔Ⅱ〕(1)，〔Ⅱ〕(2)の解答は，解答用紙「数学①」の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕(3)，〔Ⅲ〕の解答は，解答用紙「数学①」の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕，〔Ⅴ〕は，解答用紙「数学②」の所定の欄に解答しなさい。
7. １問につき２つ以上マークしないこと。２つ以上マークした場合には，その解答は無効になります。
8. 解答は，必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また，所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らず，必ず提出しなさい。
12. この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
13. 試験時間は120分です。
14. マークシート記入例

良い例	悪　い　例

学入部関
情報提供合録

〔Ⅰ〕 次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{エ}}$ ， $\boxed{\text{カ}}$ から $\boxed{\text{ク}}$ にあてはまる0から9までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし，$\boxed{\text{アイ}}$ ， $\boxed{\text{ウエ}}$ は2桁の数， $\boxed{\text{カキク}}$ は3桁の数である。また，空欄 $\boxed{\text{オ}}$ にあてはまるものを解答群の中から選び，その記号を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

(1) $n = 19$ のとき

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots\cdots + \frac{1}{1+2+\cdots\cdots+n} = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$$

である。なお，分数は既約分数にすること。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(2) 関数 $y = xe^x$ $(x \geqq -1)$ の逆関数を $y = W(x)$ とするとき，座標平面上の直線 $y = ex$ と曲線 $y = W(x)$ で囲まれる図形の面積は $\boxed{\text{オ}}$ である。ただし，e は自然対数の底である。

オの解答群

⓪ 1　　① e　　② $\dfrac{1}{e}$　　③ $\dfrac{2}{e}$

④ $1 - \dfrac{1}{2e}$　　⑤ $1 + \dfrac{1}{2e}$　　⑥ $1 - \dfrac{3}{2e}$　　⑦ $1 + \dfrac{3}{2e}$

⑧ $1 - \dfrac{5}{2e}$　　⑨ $1 + \dfrac{5}{2e}$

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(3) $(x+y)(y+z)(z+x)=0$, $x+y+z=20$, $xyz \neq 0$, $|x| \leqq 20$, $|y| \leqq 20$, $|z| \leqq 20$ を満たす整数 x, y, z の組は全部で $\boxed{\text{カキク}}$ 個ある。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

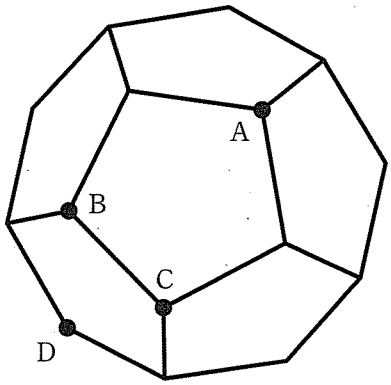
〔Ⅱ〕 空欄 $\boxed{\text{サ}}$ から $\boxed{\text{ソ}}$ にあてはまる0から9までの数字を，解答用紙の所定の欄にマークせよ。また空欄 $\boxed{\text{あ}}$ に当てはまる数を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

1辺の長さが1の正十二面体 K がある。K 上の4個の頂点A，B，C，Dを図のように取る。辺BCの中点をM，線分AMの長さを ℓ とする。

(1) 3点A，M，Dを通る平面で K を切ったとき，切り口の周の長さは $\boxed{\text{サ}}\,\ell + \boxed{\text{シ}}$ である。

(2) $\mathrm{AB} = \dfrac{\boxed{\text{ス}} + \sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(3) $\ell = \boxed{\text{あ}}$ である。



（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔Ⅲ〕 次の空欄 $\boxed{\text{か}}$ から $\boxed{\text{け}}$ に当てはまるもの（数または式）を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) 複素数 α が

$$|\alpha| = 1, \quad \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = -\sqrt{3}\,i$$

を満たすならば

$$\alpha = \boxed{\text{か}}$$

である。ただし，i は虚数単位である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(2)　2個のさいころを同時に振って，2つの目の積が偶数だった場合は試行を終了し，奇数だった場合は振り直す。ただし，振り直しの回数が定められた上限に達した場合は，出た目によらず試行を終了する。

いま，n を自然数とし，振り直しの上限を n 回と定める。試行終了時における2つの目の合計が偶数である確率を n の式で表すと $\boxed{\text{き}}$ である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

(3) 三角形ABCにおいて，垂心をH，$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の内積をs，AB $= c$，AC $= b$ とする。実数p，qが

$$\overrightarrow{AH} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$$

を満たすとき，pとqはb，c，sを用いて

$$p = \boxed{\text{く}}\ ,\ q = \boxed{\text{け}}$$

と表される。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔Ⅳ〕 2つの変量x，yのデータが，3個のx，yの値の組

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3)$$

で与えられている。

これらが

$$x_1 < x_2 < x_3,\ y_1 < y_2 < y_3,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

を満たすとき，xとyの相関係数rについて，以下の問いに答えよ。

(1) 不等式 $-1 \leqq r \leqq 1$ を証明せよ。

(2) 不等式 $r > 0$ を証明せよ。

(注) 2つの変量x，yのデータが，n個のx，yの値の組$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，……，$(x_n,\ y_n)$で与えられているとき，$r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$を$x$と$y$の相関係数という。ただし，

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2},\ s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - \bar{y})^2},$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}),$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j,\ \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}y_j$$

である。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）

〔V〕 以下の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ で定義された関数 $F(x)$ が，つねに $F''(x) = 0$ を満たすならば，$F(x) = F'(1)(x-1) + F(1)$ が成り立つことを示せ。

(2) $x > 0$ で定義された関数 $f(x)$ は第2次導関数をもつとする。正の実数 t に対して，点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と，y 軸との交点の y 座標を $g(t)$ とする。また，$a = f(1)$ とおく。

(a) $g(t)$ を t，$f(t)$，$f'(t)$ を用いて表せ。

(b) 任意の正の実数 t に対して，$g(t) = 1$ が成り立つとき，$f''(x)$ を求めよ。また，$f(x)$ を a，x を用いて表せ。

(c) 任意の正の実数 t に対して，$g(t) = 1 - t$ が成り立つとき，$f''(x)$ を求めよ。また，$f(x)$ を a，x を用いて表せ。

（このページは，計算や下書きに利用してもよい。）