

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	1	7	3	3	2	9
(2)	キ	ク	ケ			
	1	7	9			
(3)	コ	サ	シ			
	1	4	9			
(4)	ス	セ	ソ	タ		
	5	8	6	0		
(5)	チ	ツ	テ			
	6	4	1			

【解説】

(1) 3枚の和が偶数となるのは、3枚中3枚が偶数のとき、あるいは3枚中2枚が奇数で1枚が偶数のときである。1から11までの11枚中、偶数が5枚、奇数が6枚存在することから、3枚の和が偶数となる確率は

$$\frac{{}_5C_3+({}_3C_1)({}_6C_2)}{{}_{11}C_3}=\frac{17}{33}$$

となる。また3枚の積が偶数となる確率については、余事象として3枚の積が奇数となる事象を考える。このような事象が起こるのは3枚全てが奇数のときであるから、3枚の積が偶数となる確率は

$$1-\frac{{}_6C_3}{{}_{11}C_3}=\frac{29}{33}$$

となる。

(2) $0^\circ<\theta<180^\circ$ であることから

$$\begin{aligned}2\cos 3\theta &=1\\ \Leftrightarrow \cos 3\theta &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるような θ を求めると

$$\begin{aligned}3\theta &=60^\circ, 300^\circ, 420^\circ\\ \therefore \theta &=20^\circ, 100^\circ, 140^\circ\end{aligned}$$

となる。

(3) $\left\{(\log_4 x)^2-2\right\}\log_2 x^2>(\log_2 x)^2$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow &\left\{\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right)^2-2\right\}\cdot 2\log_2 x>(\log_2 x)^2\\ \Leftrightarrow &\frac{(\log_2 x)^3}{2}-(\log_2 x)^2-4\log_2 x>0\\ \Leftrightarrow &(\log_2 x)(\log_2 x+2)(\log_2 x-4)>0\\ \Leftrightarrow &-2<\log_2 x<0, 4<\log_2 x\end{aligned}$$

であり、 $\log_2 x$ は単調増加関数であることから

$$\frac{1}{4}<x<1, 16<x$$

が得られる。

(4)
$$\begin{cases}x_1+y_1+z_1=0\\ x_1=y_1\end{cases}$$

より

$$x_1=y_1=-\frac{z_1}{2}$$

が得られ、

$$x_1:y_1:z_1=-1:-1:2$$

となる。さらに、

$$\begin{cases}x_2+y_2+z_2=0\\ y_2=z_2\end{cases}$$

より

$$\begin{aligned}x_2 &=-y_2-z_2\\ &=-2z_2\end{aligned}$$

が得られる。また、 $y_1<z_1, x_2<z_2$ より、

$$-\frac{z_1}{2}<z_1, -2z_2<z_2$$

$$\therefore z_1>0, z_2>0$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}\vec{a} &=(x_1, y_1, z_1)\\ &=\left(-\frac{z_1}{2}, -\frac{z_1}{2}, z_1\right)\\ &=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)z_1\\ \vec{b} &=(x_2, y_2, z_2)\\ &=(-2z_2, z_2, z_2)\\ &=(-2, 1, 1)z_2\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\cdot(-2, 1, 1)z_1z_2\\ &=\frac{3}{2}z_1z_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &=\left|\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)z_1\right|\\ &=\frac{\sqrt{6}}{2}z_1\ (\because z_1>0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{b}| &=|(-2, 1, 1)z_2|\\ &=\sqrt{6}z_2\ (\because z_2>0)\end{aligned}$$

である。よって、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ ($0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$)とすると

$$\begin{aligned}\cos\theta &=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\\ &=\frac{\frac{3}{2}z_1z_2}{\frac{\sqrt{6}}{2}z_1\cdot\sqrt{6}z_2}\\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるから、

$$\theta=60^\circ$$

が得られる。

(5) 自然数 n に対して、

$$3x+4y<12n, x>0, y>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たす整数の組 (x, y) の個数を求める。 y は整数 k を用いて、

$$y=3k-2, y=3k-1, y=3k$$

のいずれかで表されるため、それぞれについて場合分けを行う。

[1] $y=3k-2$ のとき

$$\begin{aligned}3x+4y &<12n\\ \Leftrightarrow 3x &<12n-4(3k-2)\\ \Leftrightarrow x &<4(n-k)+\frac{8}{3}\end{aligned}$$

となるため、 $\textcircled{1}$ を満たすような x は

$$x=1, 2, \dots, 4(n-k)+2$$

となり $4(n-k)+2$ 個存在する。

[2] $y=3k-1$ のとき

$$\begin{aligned}3x+4y &<12n\\ \Leftrightarrow 3x+4(3k-1) &<12n\\ \Leftrightarrow x &<4(n-k)+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

となるため、 $\textcircled{1}$ を満たすような x は

$$x=1, 2, \dots, 4(n-k)+1$$

となり $4(n-k)+1$ 個存在する。

[3] $y=3k$ のとき

$$\begin{aligned}3x+4y &<12n\\ \Leftrightarrow 3x+4(3k) &<12n\\ \Leftrightarrow x &<4(n-k)\end{aligned}$$

となるため、 $\textcircled{1}$ を満たすような x は

$$x=1, 2, \dots, 4(n-k)-1$$

となり $4(n-k)-1$ 個存在する。

以上[1], [2], [3]より、整数の組の個数は

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n-1}\{4(n-k)+2+4(n-k)+1+4(n-k)-1\}+\{4(n-n)+2\}+\{4(n-n)+1\}\\ &=\sum_{k=1}^{n-1}\{12(n-k)+2\}+3\\ &=\sum_{k=1}^{n-1}(12k+2)+3\\ &=\frac{1}{2}(n-1)\{12\cdot1+2+12(n-1)+2\}+3\\ &=6n^2-4n+1\end{aligned}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ						
	6	7						
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	0	1	2	7	4	3	2	3

〔解説〕

(1)

$f(x)=ax^2$ より, $f'(x)=2ax$ となるから, 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= 2at(x-t) + at^2 \\ &= 2atx - at^2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)と同様にして曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(s, g(s))$ における接線を求めると

$$y = -2a(s-b)x + a(s^2 - b^2) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が異なる2本の共通接線を持つとき, ①と②の方程式が一致するから,

$$\begin{cases} t = -(s-b) \\ -t^2 = s^2 - b^2 \end{cases}$$

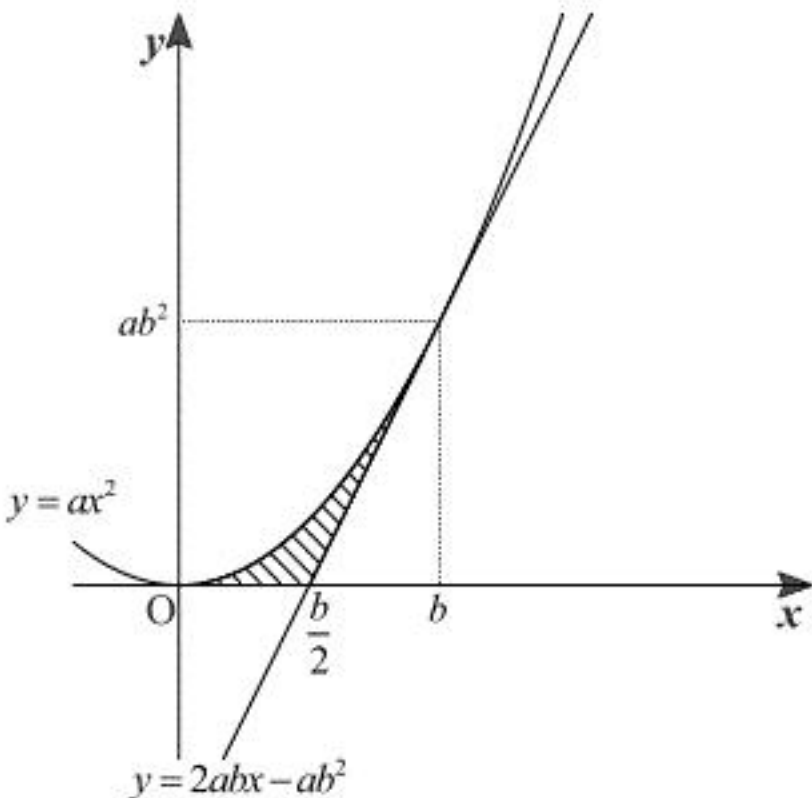
が成立する。これら2式から, t を消去すると,

$$\begin{aligned} -\{-(s-b)\}^2 &= s^2 - b^2 \\ \Leftrightarrow s(s-b) &= 0 \\ \therefore s &= 0, b \end{aligned}$$

が得られるから, それぞれの s を②に代入すると

$$\begin{aligned} \ell_1 : y &= 0 \\ \ell_2 : y &= 2abx - ab^2 \end{aligned}$$

が求められる。このとき, $y=f(x)$ と ℓ_1 と ℓ_2 に囲まれた図形は下図のようになる。



よって求めるべき面積は

$$\begin{aligned} \int_0^b ax^2 dx - \frac{1}{2} \cdot \left(b - \frac{b}{2}\right) \cdot ab^2 &= \left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^b - \frac{ab^3}{4} \\ &= \frac{ab^3}{12} \end{aligned}$$

となる。ここで $\frac{ab^3}{12} = 1$ のとき, $(a+b)b$ の最小値を求める。

$$\frac{ab^3}{12} = 1 \Leftrightarrow ab = \frac{12}{b^2}$$

であることから

$$\begin{aligned} (a+b)b &= ab + b^2 \\ &= \frac{12}{b^2} + b^2 \end{aligned}$$

が得られる。ここで, $\frac{12}{b^2} > 0, b^2 > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の関係より

$$\frac{12}{b^2} + b^2 \geq 4\sqrt{3}$$

が成立するため,

$$\begin{aligned} \frac{12}{b^2} &= b^2 \\ \Leftrightarrow b^4 &= 12 \\ \Leftrightarrow b^2 &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

のとき, 最小値 $4\sqrt{3}$ をとる。このとき, $b^2 = 2\sqrt{3}$ より,

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{144}{b^6} \\ &= \frac{144}{(2\sqrt{3})^3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅲ〕

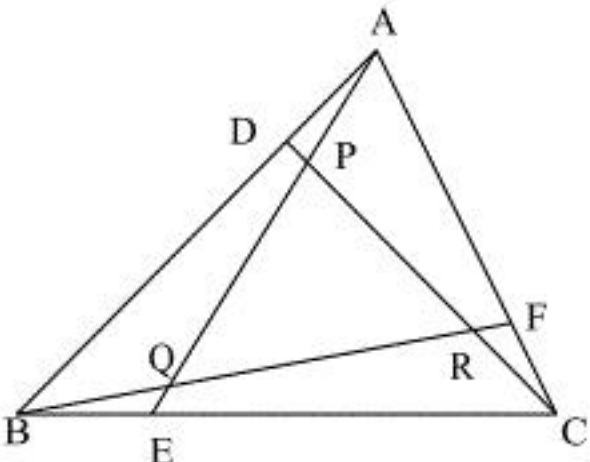
〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ			
	3	4	3	4	9			
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
	9	1	3	3	1	2	1	3
(3)	セ	ソ	タ	チ	ツ			
	5	2	4	1	3			

〔解説〕

(1)

与えられた図は下図の通りである。ここで、 $AD:DB=BE:EC=CF:FA=1:3$ である。



このとき、

$$\begin{aligned}\frac{\Delta APC}{\Delta PBC} &= \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3} \\ \frac{\Delta PBC}{\Delta PEC} &= \frac{BC}{EC} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned}\frac{AP}{PE} &= \frac{\Delta APC}{\Delta PEC} \\ &= \frac{\Delta APC}{\Delta PBC} \cdot \frac{\Delta PBC}{\Delta PEC} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

が得られる。

(2)

(1)より

$$\begin{aligned}\frac{AP}{PE} &= \frac{4}{9} \\ \Leftrightarrow AP:PE &= 4:9\end{aligned}$$

となるから、

$$\overrightarrow{CP} = \frac{9}{13}\overrightarrow{CA} + \frac{4}{13}\overrightarrow{CE} \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで

$$BE:EC=1:3$$

より、

$$\overrightarrow{CE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$$

となるため、これを①に代入すると

$$\overrightarrow{CP} = \frac{9}{13}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{13}\overrightarrow{CB} \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が得られる。さらに

$$AD:DB=1:3$$

より、

$$\overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。よって、②、③より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= \frac{12}{13}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}\right) \\ &= \frac{12}{13}\overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

が成立する。

(3)

(1)と(2)の結果を利用すると、

$$\frac{\Delta ADP}{\Delta ABC} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{PD}{CD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{52}$$

となり、

$$\frac{\Delta APC}{\Delta ABC} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{CP}{CD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{13} = \frac{3}{13}$$

となる。ここで題意の図形の対称性より

$$\frac{\Delta APC}{\Delta ABC} = \frac{\Delta BQA}{\Delta ABC} = \frac{\Delta CRB}{\Delta ABC} = \frac{3}{13}$$

が成立することから

$$\begin{aligned}\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC} &= \frac{\Delta ABC - \Delta APC - \Delta BQA - \Delta CRB}{\Delta ABC} \\ &= 1 - \frac{\Delta APC}{\Delta ABC} - \frac{\Delta BQA}{\Delta ABC} - \frac{\Delta CRB}{\Delta ABC} \\ &= 1 - \frac{3}{13} - \frac{3}{13} - \frac{3}{13} \\ &= \frac{4}{13}\end{aligned}$$

が得られる。