

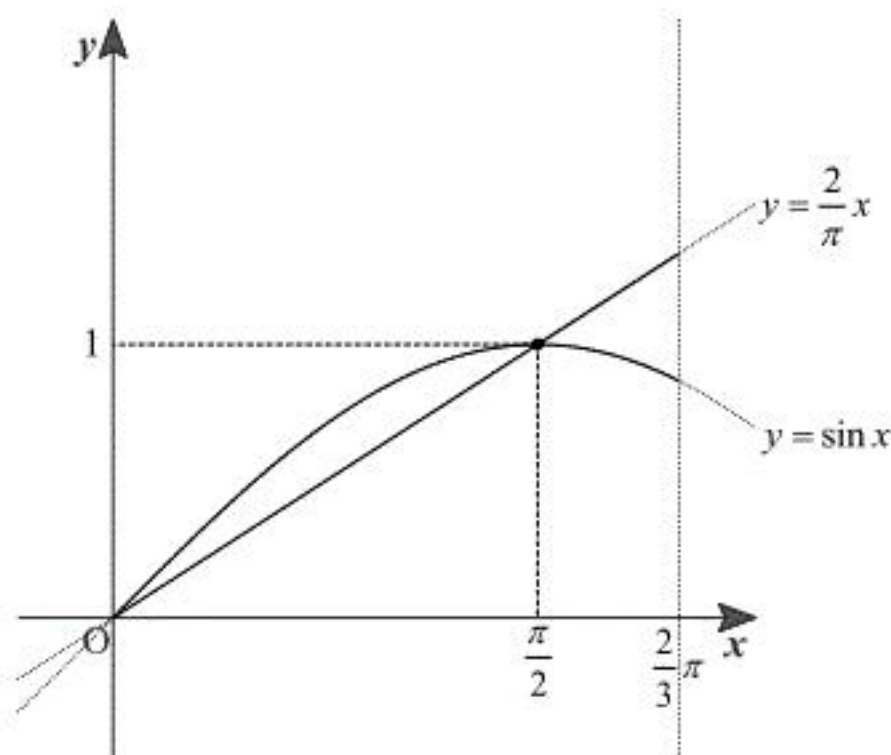
〔 I 〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ
2	9	1	8

〔解説〕

$y = \sin x$ と $y = \frac{2}{\pi}x$ のグラフは下図のようになる。



上図より、方程式 $\sin x = \frac{2}{\pi}x$ の $0 < x < \frac{2}{3}\pi$ の範囲における解は $x = \frac{\pi}{2}$ となる。また上図より、

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ 、 $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{2}{3}\pi$ のとき $\sin x < \frac{2}{\pi}x$ であるから

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \left| \sin x - \frac{2}{\pi}x \right| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx \\
 &= \left[-\cos x - \frac{1}{\pi}x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\cos x - \frac{1}{\pi}x^2 \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \\
 &= \left\{ \left(0 - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} \right) - (-1 + 0) \right\} - \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4\pi^2}{9} \right) - \left(0 - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} \right) \right\} \\
 &= \left(-\frac{\pi}{4} + 1 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{36}\pi \right) \\
 &= -\frac{1}{18}\pi + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{9 - \pi}{18}
 \end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
2	1	6	2	0	1	3	3	3	2	7

〔解説〕

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \ (r \geq 0)$ とおくと、

$$|z| = \sqrt{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ = r$$

となる。 $|z| = 2$ より $r = 2$ と求まる。さらに

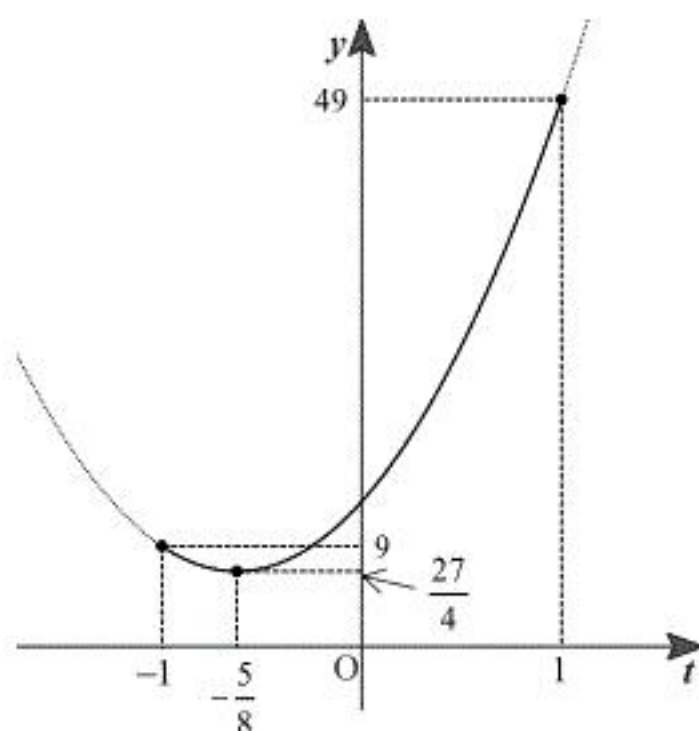
$$\begin{aligned} |z^2 + iz - 1|^2 &= (z^2 + iz - 1)(\overline{z^2 + iz - 1}) \\ &= (z^2 + iz - 1)(\bar{z}^2 - i\bar{z} - 1) \\ &= z^2 \bar{z}^2 - iz^2 \bar{z} - z^2 + iz \bar{z}^2 + z \bar{z} - iz - \bar{z}^2 + i\bar{z} + 1 \\ &= (z \bar{z})^2 - i(z \bar{z})z - z^2 + i(z \bar{z})\bar{z} + (z \bar{z}) - iz - \bar{z}^2 + i\bar{z} + 1 \\ &= 4^2 - 5iz - z^2 + 5i\bar{z} + 4 - \bar{z}^2 + 1 \\ &= 21 + 5i(\bar{z} - z) - (\bar{z}^2 + z^2) \\ &= 21 + 5i\{2(\cos \theta - i \sin \theta) - 2(\cos \theta + i \sin \theta)\} - \{4(\cos 2\theta - i \sin 2\theta) + 4(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)\} \\ &= 21 + 5i(-4i \sin \theta) - 8 \cos 2\theta \\ &= 21 + 20 \sin \theta - 8(1 - 2 \sin^2 \theta) \\ &= 16 \sin^2 \theta + 20 \sin \theta + 13 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで $t = \sin \theta$ とおき、 $f(t) = |z^2 + iz - 1|^2$ とする。ただし $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より、

$-1 \leq t \leq 1$ である。このとき

$$\begin{aligned} f(t) &= 16t^2 + 20t + 13 \\ &= 16\left(t + \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{27}{4} \end{aligned}$$

より、 $y = f(t)$ のグラフは下図のようになる。



上図より $f(t)$ は $t = 1$ で最大値 $f(1) = 49$ をとり、 $t = -\frac{5}{8}$ で最小値 $f\left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{27}{4}$ をとる。

$|z^2 + iz - 1| \geq 0$ 、 $f(t) \geq 0$ より $|z^2 + iz - 1| = \sqrt{f(t)}$ であるから

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{f\left(-\frac{5}{8}\right)} \leq |z^2 + iz - 1| \leq \sqrt{f(1)} = 7$$

を得る。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
3	1	2	2	4	7

〔解説〕

与式は

$$\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{y^2}{2x}} \geq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。①の両辺の自然対数をとると、

$$\log \left(\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{y^2}{2x}} \right) \geq \log 1$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{1}{\sqrt{x}} + \log e^{-\frac{y^2}{2x}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\log x - \frac{y^2}{2x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 \leq -x \log x \quad (\because x > 0)$$

と変形できる。 $y^2 \geq 0$ であるから

$$-x \log x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log x \leq 0 \quad (\because x > 0)$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1$$

となり、与条件 $x > 0$ より、 $0 < x \leq 1$ である。さらに $f(x) = -x \log x$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\log x - 1 \\ &= -(\log x + 1) \end{aligned}$$

であるから増減表は次のようになる。

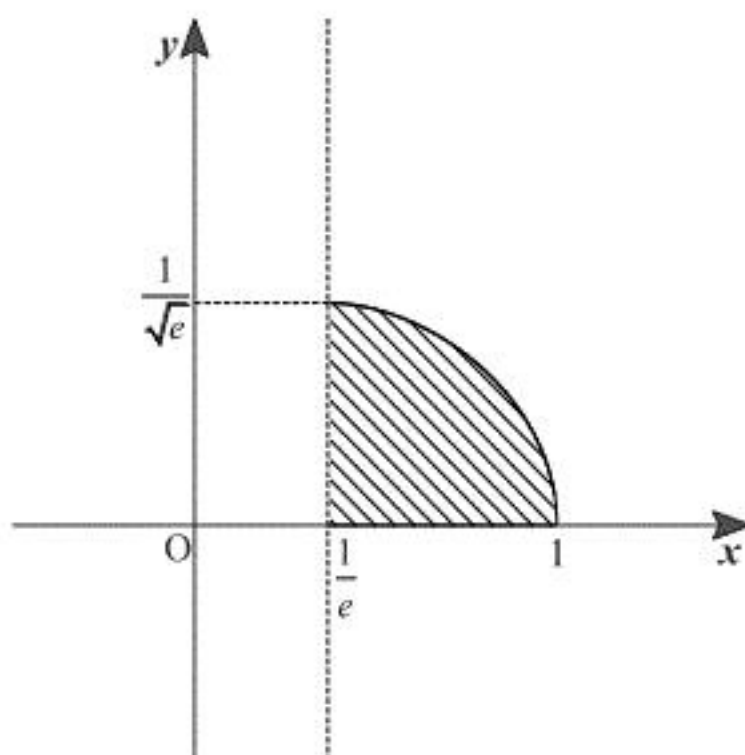
x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

増減表より、 $0 < x \leq 1$ において、 $x = \frac{1}{e}$ のとき最大値

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \log \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

をとる。よって y^2 の取りうる値の範囲は $0 \leq y^2 \leq \frac{1}{e}$ である。ここで、 $y^2 = \frac{1}{e}$ となるのは

$x = \frac{1}{e}$ のときである。以上より、 $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$ における $y = \sqrt{f(x)}$ の概形は下図のようになる。



よって曲線 $y = \sqrt{-x \log x}$ と直線 $x = \frac{1}{e}$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転させて

てできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \pi \left(\sqrt{-x \log x} \right)^2 dx \\ &= -\pi \int_{\frac{1}{e}}^1 x \log x dx \\ &= -\pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \log x dx \\ &= -\pi \left(\left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ &= -\pi \left[\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= -\pi \left\{ \left(0 - \frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} \right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{3}{e^2} \right) \end{aligned}$$

と求まる。