【Ⅰ】

【解答】

(1)	ア		イ		ウ									
	2		1		3									
(2)	エ		オ		カ		キ		ク		ケ			
	4		7		1		7		2		7			
(3)	(a)		コ		サ									
			1		6									
	(b)		シ		ス		セ							
			1		3		6							
	(c)		ソ		タ									
			4		9									
(4)	チ		ツ		テ		ト		ナ		ニ		ヌ	
	3		4		5		7		2		1		2	

(1)	ア		イ		ウ									
	2		1		3									
(2)	エ		オ		カ		キ		ク		ケ			
	4		7		1		7		2		7			
(3)	(a)		コ		サ									
			1		6									
	(b)		シ		ス		セ							
			1		3		6							
	(c)		ソ		タ									
			4		9									
(4)	チ		ツ		テ		ト		ナ		ニ		ヌ	
	3		4		5		7		2		1		2	

(1)	ア		イ		ウ									
	2		1		3									
(2)	エ		オ		カ		キ		ク		ケ			
	4		7		1		7		2		7			
(3)	(a)		コ		サ									
			1		6									
	(b)		シ		ス		セ							
			1		3		6							
	(c)		ソ		タ									
			4		9									
(4)	チ		ツ		テ		ト		ナ		ニ		ヌ	
	3		4		5		7		2		1		2	

【解説】

(1)

$$\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}=\frac{a(x-2)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}$$
$$=\frac{(b+c)x^2+(a-3b-2c)x-(2a-2b-c)}{(x-1)^2(x-2)}$$

となる。これより，$\dfrac{2x^2-x-3}{(x-1)^2(x-2)}=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x-2}$ が x についての恒等式となる必要十分条件は，

$$\begin{cases}b+c=2\\a-3b-2c=-1\\2a-2b-c=3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a=2,\ b=-1,\ c=3$$

である。

(2)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，実数 $x,\ y,\ z$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ とする。OH⊥(平面ABC)であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x\left(\vec{a}\cdot\vec{b}-\left|\vec{a}\right|^2\right)+y\left(\left|\vec{b}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+z\left(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow -x+2y+z=0 \qquad \cdots①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x\left(\vec{c}\cdot\vec{a}-\left|\vec{a}\right|^2\right)+y\left(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+z\left(\left|\vec{c}\right|^2-\vec{c}\cdot\vec{a}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow -2x+4z=0 \qquad \cdots②$$

が成立する。また，H は平面 ABC 上の点であるから，

$$x+y+z=1 \qquad \cdots③$$

である。以上①，②，③を連立して解くと，

$$x=\frac{4}{7},\ y=\frac{1}{7},\ z=\frac{2}{7}$$

を得る。

(3)(a)

5 人が輪になって並ぶ並び方の総数は，A を固定して考えれば 4!＝24 通りとわかる。これらの事象は同様に確からしい。このうち，A の両隣が B, C であるような並び方は 2·2＝4 通りであるから，試行を 1 回行うとき，A が B と C の 2 人と手をつなぐ確率は，

$$\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$$

である。

(b)

試行を 3 回行うとき，A がある特定の 2 人と 3 回手をつなぐ確率は，(a)より，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216} \qquad \cdots①$$

である。したがって，A と 3 回手をつなぐ人が 2 人いる確率は，

$$\frac{1}{216}\times{}_2\mathrm{C}_2=\frac{1}{36}$$

である。

(c)

試行を 3 回行うとき，A と 3 回手をつなぐ人が B だけである確率を考える。試行を 1 回行うとき，A が B と手をつなぐ確率は，

$$\frac{3!\times2}{24}=\frac{1}{2}$$

であるから，試行を 3 回行うとき，A が B と 3 回手をつなぐ確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

である。また，A が B を含む 2 人と 3 回手をつなぐ確率は，①より $\dfrac{3}{216}=\dfrac{1}{72}$ である。したがって，試行を 3 回行うとき，「A と 3 回手をつなぐ人が B だけである確率」は，「A が B と 3 回手をつなぐ確率」から「A が B を含む 2 人と 3 回手をつなぐ確率」を引いたものなので，

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{72}=\frac{1}{9}$$

である。以上より，試行を 3 回行うとき，A と 3 回手をつなぐ人が 1 人だけである確率は，

$$\frac{1}{9}\times{}_1\mathrm{C}_1=\frac{4}{9}$$

である。

(4)

OA の中点を $\mathrm{M}(m)$ とすると，

$$m=\frac{3}{2}+2i$$

である。点 z が L 上を動くとき，$L\perp\mathrm{OA}$ であるから，$\dfrac{z-m}{m}$ は純虚数または 0 となる。すなわち，

$$\frac{z-m}{m}+\frac{\overline{z}-\overline{m}}{\overline{m}}=0 \qquad \cdots①$$

が成立する。ここで，$w=\dfrac{25}{z}$ より，$w\neq0$ であるから，

$$z=\frac{25}{w} \qquad \cdots②$$

となる。②を①に代入して，

$$\frac{\frac{25}{w}-m}{m}+\frac{\frac{25}{\overline{w}}-\overline{m}}{\overline{m}}=0$$
$$\Leftrightarrow 25\overline{m}w+25m\overline{w}-2mm\overline{w}w=0\ (\because m\neq0)$$
$$\Leftrightarrow 25\overline{m}w+25m\overline{w}-\frac{25}{2}w\overline{w}=0\ \left(\because m\overline{m}=\frac{25}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow w\overline{w}-2m\overline{w}-2\overline{m}w=0$$
$$\Leftrightarrow w\overline{w}-2m\overline{w}-2\overline{m}w+4m\overline{m}=4m\overline{m}$$
$$\Leftrightarrow\left(w-2\overline{m}\right)\left(\overline{w}-2m\right)=25\ \left(\because m\overline{m}=\frac{25}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow\left|w-2\overline{m}\right|^2=25$$

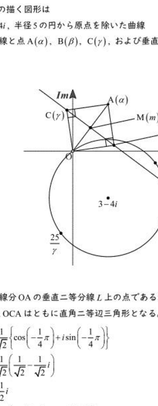
を得る。したがって，$\left|w-2\overline{m}\right|\geqq0$ より

$$\left|w-(3-4i)\right|=5$$

となるから，w の描く図形は

中心 $3-4i$，半径 5 の円から原点を除いた曲線

である。この曲線と点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$，および垂直二等分線 L を図示すると，下の図のようになる。



ここで，B, C は線分 OA の垂直二等分線 L 上の点であるから，OB＝AB，OC＝AC となるので，△OBA と△OCA はともに直角二等辺三角形となる。したがって図より，

$$\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)\right\}$$
$$=\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i$$
$$\gamma=\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right\}$$
$$=\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$$

と求まる。ここで，

$$\frac{25}{\beta}=\frac{25}{\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i}$$
$$=7-i$$
$$\frac{25}{\gamma}=\frac{25}{-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i}$$
$$=-1-7i$$

より，

$$\frac{\frac{25}{\beta}+\frac{25}{\gamma}}{2}=3-4i$$

となる。これは点 w が動く円の中心であることから，点 z が線分 BC 上を動くとき，w が描く図形は半径 5 の半円であることがわかる。したがって，w の描く弧の長さは

$$5\pi$$

と求まる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

あ	$3c$
い	$3-3c$
う	$12c+4$
え	2^k-1
お	$(k-1)(1-c)$

か	2^{k-1}
き	$2^{k-2}(k-1)$
く	$2^{k-1}(k-2)+1$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} a_8 &= a_4 + c \\ &= a_2 + 2c \\ &= a_1 + 3c \\ &= 3c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{15} &= a_7 + 1 - c \\ &= a_3 + 2 - 2c \\ &= a_1 + 3 - 3c \\ &= 3 - 3c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{35} &= (a_{16} + c) + (a_{16} + 1 - c) + (a_{17} + c) + (a_{17} + 1 - c) \\ &= 2a_{16} + 2a_{17} + 2 \\ &= 2(a_8 + c) + 2(a_8 + 1 - c) + 2 \\ &= 4a_8 + 4 \\ &= 12c + 4 \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

第k群は2^{k-1}個の項からなるので,

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} \\ &= 2^k - 1 \end{aligned}$$

と求まる。ここで$a_{2^k-1} = b_k$とおけば,

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_{2^{k+1}-1} \\ &= a_{2(2^k-1)+1} \\ &= a_{2^k-1} + 1 - c \\ &= b_k + 1 - c \end{aligned}$$

$$b_1 = 0$$

より, 2以上の自然数kに対して

$$\begin{aligned} b_k &= 0 + \sum_{i=1}^{k-1} (1-c) \\ &= (k-1)(1-c) \end{aligned}$$

が成立する。これは$k=1$でも成り立つ。よって, $a_n = (k-1)(1-c)$である。

(3)

$$\begin{aligned} a_{2n} + a_{2n+1} &= a_n + c + a_n + 1 - c \\ &= 2a_n + 1 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} a_i \\ &= \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} (a_{2i} + a_{2i+1}) \\ &= \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} (2a_i + 1) \\ &= 2T_k + \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} 1 \\ &= 2T_k + 2^{k-1} \end{aligned}$$

$$\therefore T_{k+1} - 2T_k = 2^{k-1}$$

と求まる。したがって,

$$\frac{T_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{T_k}{2^k} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{T_1}{2^1} = 0$$

より, 2以上の自然数kに対して,

$$\begin{aligned} \frac{T_k}{2^k} &= 0 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{4} \\ &= \frac{k-1}{4} \end{aligned}$$

が成立する。これは$k=1$でも成り立っている。よって,

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{k-1}{4} \cdot 2^k \\ &= 2^{k-2}(k-1) \end{aligned}$$

と求まる。

(4)

2以上の自然数kに対して,

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=1}^{k} T_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} 2^{i-2}(i-1) \\ &= 0 + \sum_{i=2}^{k} 2^{i-2}(i-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2S_k &= \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1}(i-1) \\ &= \sum_{i=2}^{k+1} 2^{i-2}(i-2) \\ &= \sum_{i=2}^{k} 2^{i-2}(i-2) + 2^{k-1}(k-1) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} S_k - 2S_k &= 0 + \sum_{i=2}^{k} \left\{ 2^{i-2}(i-1) - 2^{i-2}(i-2) \right\} - 2^{k-1}(k-1) \\ &= \sum_{i=2}^{k} 2^{i-2} - 2^{k-1}(k-1) \\ &= \frac{2^{k-1}-1}{2-1} - 2^{k-1}(k-1) \\ &= 2^{k-1}(2-k) - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore S_k = 2^{k-1}(k-2) + 1$$

となる。これは$k=1$でも成立する。

〔Ⅲ〕

(1)

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

より，$f'(x)=0$ となるのは $x=0$ のときのみである。このとき，

$$f(0)=-\log 2$$

である。また，

$$f''(x)=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

より $f''(0)>0$ であるから，$f(x)$ は

$x=0$ で極小値 $f(0)=-\log 2$

をとる。

(答) $x=0$ のとき，極小値 $-\log 2$

(2)

$$f''(x)=\frac{-2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{-2(x-1)(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

より，$f''(x)$ の符号は，$x=-1$ の前後と，$x=1$ の前後で変化する。したがって，曲線 C の変曲点の座標は，$f(\pm 1)=0$ より，

$$(-1,\ 0),\ (1,\ 0)$$

である。

(答) $(-1,\ 0),\ (1,\ 0)$

(3)

$$h'(x)=x-\frac{2x}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^3-x}{x^2+1}$$

$$=\frac{x(x-1)(x+1)}{x^2+1}$$

$$h(0)=\log 2-\frac{1}{2}$$

$$h(\pm 1)=0$$

より，$h(x)$ の増減表は以下のようになる。

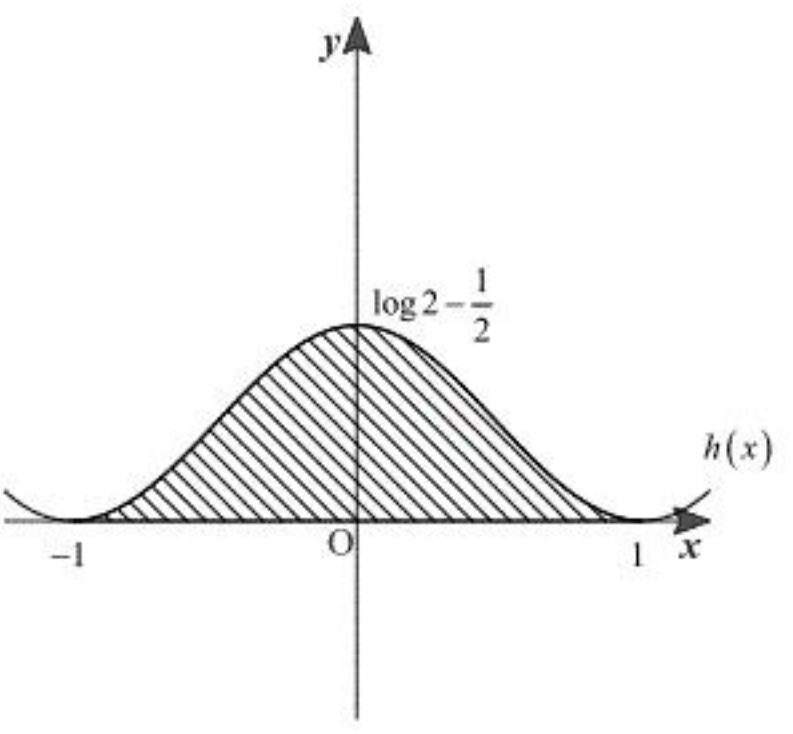
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	0	↗	$\log 2-\frac{1}{2}$	↘	0	↗

よって，$h(x)$ は $x=\pm 1$ で最小値 0 をとる。

(答) $x=\pm 1$ のとき，最小値 0

(4)

(3)より，$h(x)$ のグラフは以下のようになる。



曲線 C と D で囲まれた図形の面積は，$y=h(x)$ の描く曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積に等しい。したがって求める面積は，

$$\int_{-1}^{1}h(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2-1}{2}-\log\left(\frac{x^2+1}{2}\right)\right)dx$$

で求められる。

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{2}dx=\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1}$$

$$=-\frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1}\log\left(\frac{x^2+1}{2}\right)dx=\left[x\log\left(\frac{x^2+1}{2}\right)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{x^2+1}dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}\left(2-\frac{2}{x^2+1}\right)dx$$

$$=-[2x]_{-1}^{1}+2\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=-4+2\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx$$

となる。ここで $x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$ とすれば，

$$dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

であり，積分区間は

x	-1	$\rightarrow$	1
t	$-\frac{\pi}{4}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

のようになる。これより，

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$=\left[t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

となる。以上より，求める面積は

$$\int_{-1}^{1}h(x)dx=-\frac{2}{3}+4-2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{10}{3}-\pi$$

である。

(答) $\frac{10}{3}-\pi$