

【Ⅰ】

【解答】

	最大	最小
(1)	B	C
(2)	A	C
(3)	A	B
(4)	C	A
(5)	A	B

【解説】

(1)
 $2^{\frac{2}{3}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.5}, \sqrt[4]{5}$ は全て正であるから、12 乗しても大小関係は変わらない。全ての値を12 乗すると、順に、

$$\begin{aligned} \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{12} &= 2^8 = 256 \\ \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.5}\right\}^{12} &= 3^6 = 729 \\ \left(\sqrt[4]{5}\right)^{12} &= 5^3 = 125 \end{aligned}$$

となる。また、 $729 > 256 > 125$ より、
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.5} > 2^{\frac{2}{3}} > \sqrt[4]{5}$$
となる。

(2)
式の割り算を計算すると、
$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 6 &= (x + 2)(x - 4) + 2 \\ 2x^2 - 9x + 9 &= (x - 3)(2x - 3) \\ 3x^2 - 10x - 9 &= (x - 4)(3x + 2) - 1 \end{aligned}$$
となり、余りはそれぞれ
2, 0, -1
となる。

(3)
扇形の半径を r 、中心角を θ 、弧の長さを l とおくと、扇形の面積 S は、
$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$

と表される。よって、それぞれの扇形の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{6} &= \frac{3}{4}\pi \\ \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \left(2\pi \cdot \frac{15}{360}\right) &= \frac{2}{3}\pi \\ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{9}{10} &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\pi = 3.14\dots$ より、
$$3 < \pi < \frac{16}{5} = 3.2$$

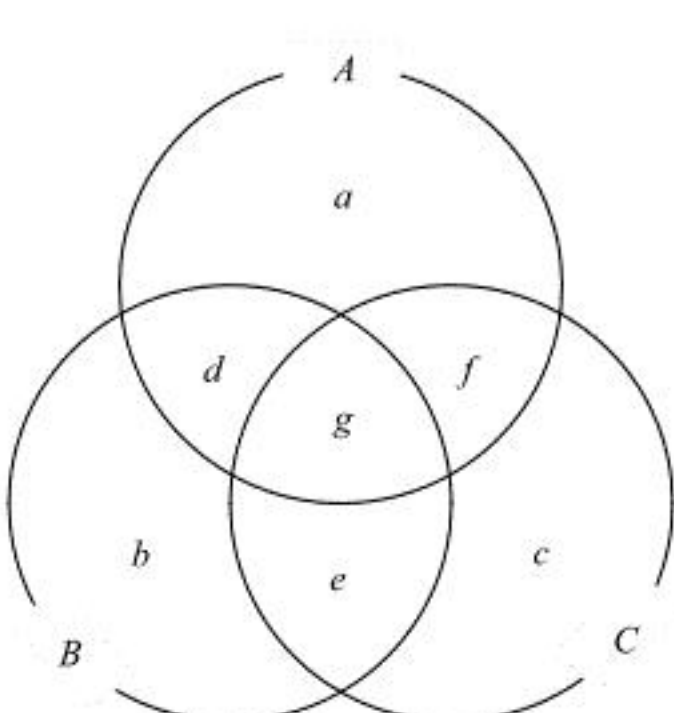
である。これより、それぞれの扇形の面積の大小関係は、

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{4}\pi}{\frac{9}{4}} &= \frac{\pi}{3} > 1 \\ \frac{\frac{2}{3}\pi}{\frac{9}{4}} &= \frac{8}{27}\pi < \frac{8}{27} \cdot \frac{16}{5} = \frac{128}{135} < 1 \end{aligned}$$

より、

$$\frac{2}{3}\pi < \frac{9}{4} < \frac{3}{4}\pi$$

となる。
(4)
以下のベン図の各集合に含まれる個数を、図のように $a \sim g$ とおく。



このとき、条件より、

$$\begin{aligned} n((A \cup B) \cap C) > n(B) &\Leftrightarrow e + f + g > b + d + e + g \\ n((A \cup C) \cap B) > n(A) &\Leftrightarrow d + e + g > a + d + f + g \end{aligned}$$

となる。これより、 $b \geq 0, c \geq 0$ なので、

$$\begin{aligned} b + d + e + g > a + d + f + g &\Leftrightarrow n(B) > n(A) \\ c + e + f + g > b + d + e + g &\Leftrightarrow n(C) > n(B) \end{aligned}$$

が成り立つ。以上より、 $n(C) > n(B) > n(A)$ である。

(5)
2 の倍数でも3 の倍数でもない正の整数を1 から小さい順に並べた数列を $\{a_n\}$ とおく。このとき、以下のように群に分け、それぞれ順に第1群、第2群、というように呼ぶことにする。

$$\{a_n\} = 1, 5 \mid 7, 11 \mid 13, \dots$$

1つの群に2つの項が含まれていることから、第 k 群に含まれる項は、

$$\begin{aligned} a_{2k-1}, a_{2k} \end{aligned}$$

の2項だとわかる。また、これら2項の値は、

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= 6k - 5 \\ a_{2k} &= 6k - 1 \end{aligned}$$

となる。まず、2021 が現れる項数は、 $2021 = 6 \cdot 337 - 1$ より、2021 は第337 群の2 番目にある。したがって、2021 が現れる項数は、

$$2 \cdot 337 = 674$$

より、第674 項である。次に、第200 項の値は、 $200 = 2 \cdot 100$ より、第100 群の2 番目にある。したがって、第200 項の値は、

$$\begin{aligned} 6 \cdot 100 - 1 &= 599 \end{aligned}$$

である。続いて、初項から第20 項までの和は、第1群から第10 群までに含まれるすべての項の和である。これより、この値は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \{(6k - 5) + (6k - 1)\} &= \sum_{k=1}^{10} (12k - 6) \\ &= 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 - 6 \cdot 10 \\ &= 600 \end{aligned}$$

である。よって、
(2021 が現れる項数) > (初項から第20 項までの和) > (第200 項の値)
である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	1
	イ	6
	ウ	6
	エ	4
(2)	オ	7
	カ	5
(3)	キ	1
	ク	0
	ケ	1
	コ	0

〔解説〕

(1)

$X = \log_2 x, Y = \log_2 y$ とおく。 $x > 1, y > 1$ より、真数条件は満たしており、かつ $X > 0, Y > 0$ である。これらを連立方程式に代入すると、

$$\begin{cases} (\log_2 x)^2 + 3\log_2 x - 4\log_2 y = 4 \\ \log_2 x - 2\log_2 y = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + 3X - 4Y = 4 \\ X - 2Y = -8 \end{cases}$$

となる。 $X > 0, Y > 0$ に注意してこれを解くと、

$$X = 4, Y = 6$$

となる。したがって、

$$\begin{cases} \log_2 x = 4 \\ \log_2 y = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 64 \end{cases}$$

となる。

(2)

与えられた式を変形すると、

$$\sqrt{2} \sin \theta + \sqrt{6} \cos \theta = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \sin(\theta + 60^\circ) = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin(\theta + 60^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。また、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より、 $60^\circ \leq \theta + 60^\circ \leq 240^\circ$ である。この範囲で考えると、

$$\sin(\theta + 60^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \theta + 60^\circ = 135^\circ$$

$$\Leftrightarrow \theta = 75^\circ$$

である。

(3)

まず、 $y = f(x)$ が原点对称なグラフであることから、 $f(x)$ は奇関数であるため、任意の x について、

$$f(x) + f(-x) = 0$$

が成り立つ。よって、

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d) + \{a \cdot (-x)^3 + b \cdot (-x)^2 + c \cdot (-x) + d\} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2bx^2 + 2d = 0$$

$$\Leftrightarrow bx^2 + d = 0$$

となる。この式は x の値によらず恒等的に成り立つから、

$$b = 0, d = 0$$

である。よって、3次関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = ax^3 + cx$$

の形で表される。また、

$$f'(x) = 3ax^2 + c$$

である。条件より、常に $f'(x) > 0$ であることから、

$$3ax^2 + c > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。続いて、条件より、

$$1 < f(1) < 3$$

$$\Leftrightarrow 1 < a + c < 3$$

である。ここで、 a, c は整数であるから、

$$a + c = 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①が任意の x で成立するには、 $a \geq 0$ が必要である。ただし、 $a = 0$ のとき $f(x)$ は3次関数とならないので、 $a > 0$ が必要である。また、①が $x = 0$ のときに成立するには、 $c > 0$ が必要である。これらと②を合わせると、 (a, c) の組み合わせは

$$(a, c) = (1, 1)$$

となるが、このとき任意の x について①を満たすので十分である。よって、 (a, c) の組み合わせは、

$$(a, c) = (1, 1)$$

のみである。以上より、

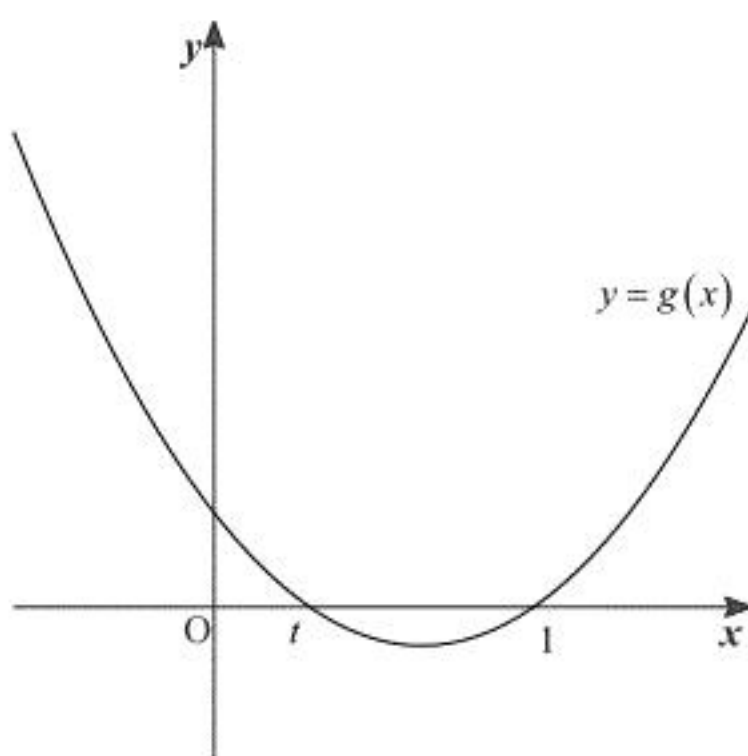
$$(a, b, c, d) = (1, 0, 1, 0)$$

である。

〔Ⅲ〕

(1)

$y = g(x)$ のグラフは下のようになる。



$0 \leq x \leq t$ で $g(x) \geq 0$, $t \leq x \leq 1$ で $g(x) \leq 0$ より,

$$\int_0^t |g(x)| dx = \int_0^t g(x) dx$$

$$\int_t^1 |g(x)| dx = -\int_t^1 g(x) dx$$

である。また、 $\frac{1}{6}$ 公式より、 $-\int_t^1 g(x) dx = \frac{1}{6}(1-t)^3$ であるから、

$$\int_0^t (x-1)(x-t) dx = \frac{1}{6}(1-t)^3$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t \{x^2 + (-t-1)x + t\} dx = \frac{1}{6}(1-t)^3$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{-t-1}{2}x^2 + tx \right]_0^t = \frac{1}{6}(1-t)^3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}t = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

となる。

(答) $t = \frac{1}{3}$

(2)

$f(t)$ を計算すると、

$$f(t) = \int_0^1 |g(x)| dx$$

$$= \int_0^t g(x) dx + \int_t^1 \{-g(x)\} dx$$

$$= \left(-\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right) + \left(-\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} \right)$$

$$= -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}$$

となる。

(答) $f(t) = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}$

(3)

$f(t)$ の導関数は、

$$f'(t) = -t^2 + 2t - \frac{1}{2}$$

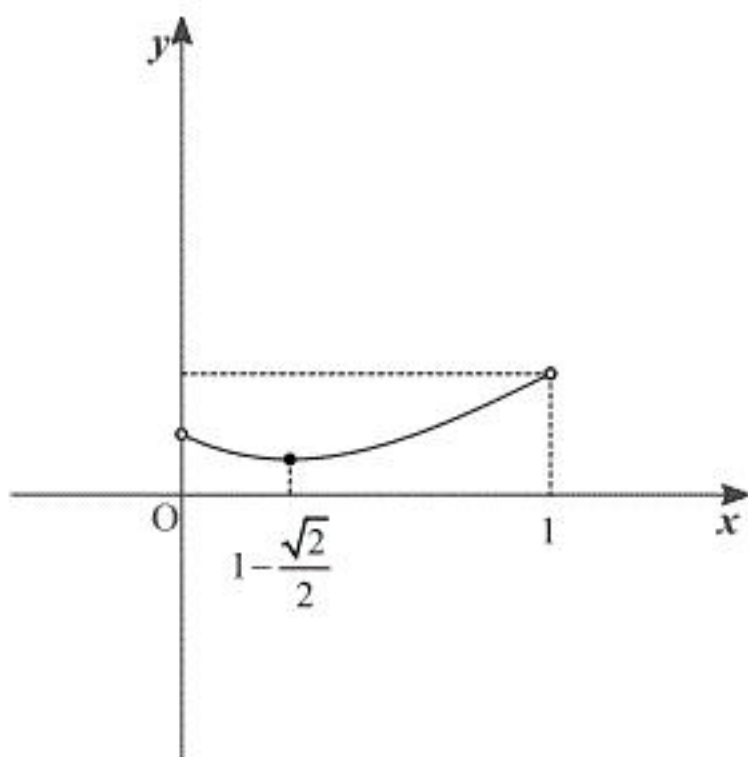
$$= -\left\{ t - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} \left\{ t - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

である。 $0 < t < 1$ において、 $f'(t) = 0$ となるとき、 $t = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。よって、 $y = f(t)$ の増減

表は下のようになる。

t	(0)	...	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	...	(1)
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$					

増減表より、 $y = f(t)$ のグラフは下のようになる。



よって、 $f(t)$ が最小となる t の値は $t = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

(答) $t = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

〔Ⅳ〕

〔解答〕

$$(1) \quad \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

(2)

(1)より、 $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}s\overrightarrow{AB} + \frac{s}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AR} = \frac{t}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}t\overrightarrow{AC}$ である。また、点Q, R について、線分BP をそれぞれ $m:(1-m)$, $n:(1-n)$ に内分する点とする(ただし、 $0 < m < 1, 0 < n < 1$)。このとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= (1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AP} \\ &= (1-m)\overrightarrow{AB} + km\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AR} &= (1-n)\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AP} \\ &= (1-n)\overrightarrow{AB} + kn\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

と表せる。 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ は一次独立なので、係数を比較すると、

$$\begin{cases} 1-m = \frac{2}{3}s \\ km = \frac{s}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 1-n = \frac{t}{3} \\ kn = \frac{2}{3}t \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと、

$$s = \frac{3k}{2k+1}, t = \frac{3k}{k+2}, m = \frac{1}{2k+1}, n = \frac{2}{k+2}$$

となる。これらは確かに $0 < m < 1, 0 < n < 1$ を満たす。

$$(答) \quad s = \frac{3k}{2k+1}, t = \frac{3k}{k+2}$$

(3)

(2)より、 $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{RP}$ について、それぞれ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BQ} &= m\overrightarrow{BP} \\ &= \frac{1}{2k+1}\overrightarrow{BP} \\ \overrightarrow{RP} &= (1-n)\overrightarrow{BP} \\ &= \frac{k}{k+2}\overrightarrow{BP} \end{aligned}$$

と表すことができる。これらより、 $\overrightarrow{BQ} = u\overrightarrow{RP}$ とするとき、

$$\frac{1}{2k+1} = u \cdot \frac{k}{k+2} \Leftrightarrow u = \frac{k+2}{2k^2+k}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} (2k^2+k) - (k+2) &= 2(k+1)(k-1) \\ &< 0 \quad (\because 0 < k < 1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2k^2+k < k+2$$

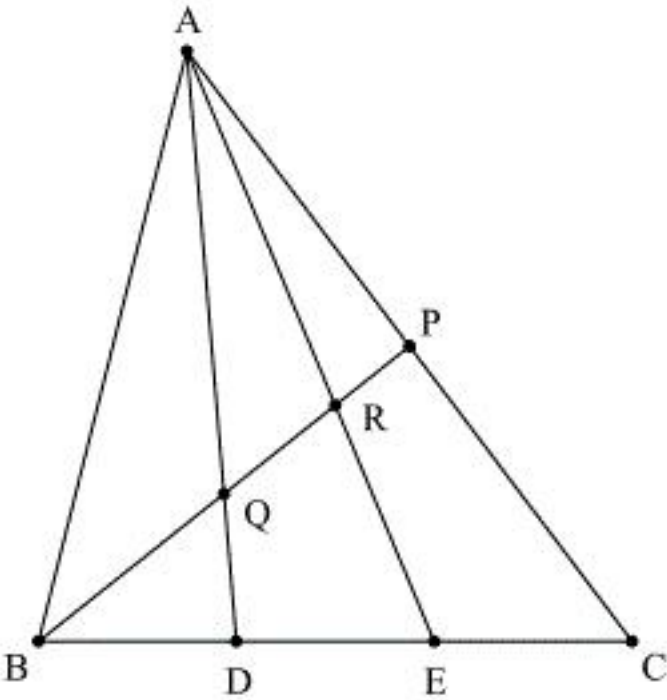
$$\therefore u = \frac{k+2}{2k^2+k} > 1 \quad (\because 2k^2+2 > 0)$$

となり、題意は示された。

(証明終)

〔解説〕

(1)



点Dは辺BCを1:2に内分する点であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \frac{2}{2+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

となる。また、点Eは辺BCを2:1に内分する点であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{2+1}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

となる。

〔V〕

〔解答〕

(1) 4, 6

(2)

方針の選び方は6通りであり、それぞれ同様に確からしい。また、黒文字は、方針1では0枚、方針2では6枚、方針3～6では3枚含まれる。よって、表にしたカードが2枚とも黒文字である確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{0}{{}_6C_2} + \frac{{}_6C_2}{{}_6C_2} + \frac{{}_3C_2 \cdot 4}{{}_6C_2} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{15+12}{15} = \frac{3}{10}$$

である。

(答) $\frac{3}{10}$

(3)

各方針において偶数は、方針1, 2では3枚、方針3では0枚、方針4では6枚、方針5では4枚、方針6では2枚含まれる。よって、

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{{}_3C_2 \cdot 2 + 0 + {}_6C_2 + {}_4C_2 + {}_2C_2}{{}_6C_2} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{28}{15} = \frac{14}{45}$$

である。

(答) $\frac{14}{45}$

(4)

黒文字4は、方針2, 4, 5で含まれるため、1枚目に黒文字4を引く確率は

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

である。赤文字は方針2では0枚、方針4, 5では3枚含むため、続いてもう1枚を表にしたときに赤文字のカードであるような確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{0+1 \cdot 3+1 \cdot 3}{6 \cdot 5} \right) = \frac{1}{30}$$

である。ゆえに、1枚目が黒文字4であった状況下で、もう1枚を表にしたとき、赤文字のカードである確率は、

$$\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{12}} = \frac{2}{5}$$

である。

(答) $\frac{2}{5}$

〔解説〕

(1)

黒文字のカード、赤文字のカードを、1から小さい順にそれぞれ $B_1 \sim B_6, R_1 \sim R_6$ と定める。このとき、各方針に従ってAが抜き出すカードは下の表のとおりである。

方針	抜き出すカード
1	$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$
2	$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$
3	$B_1, B_3, B_5, R_1, R_3, R_5$
4	$B_2, B_4, B_6, R_2, R_4, R_6$
5	$B_4, B_5, B_6, R_4, R_5, R_6$
6	$B_2, B_3, B_5, R_2, R_3, R_5$

上表より、 B_2, R_2 を共に含む抜き出し方をする方針は、方針4と方針6である。