

【1】

〔解答〕

(1)	ア	1
	イ	2

(2)	ウ	2
	エ	6

(3)	オ	5
	カ	2

(4)	キ	9
	ク	9

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}x^2+9x-16&=\left(x+\frac{9}{2}\right)^2-\frac{145}{4} \text{ であるため} \\x^2+9x-16&\leq 0 \\ \Leftrightarrow \left(x+\frac{9}{2}\right)^2&\leq \frac{145}{4} \\ \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{145}}{2}&\leq x+\frac{9}{2}\leq \frac{\sqrt{145}}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{145}+9}{2}&\leq x\leq \frac{\sqrt{145}-9}{2}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $144<145<169$ であることより

$$\begin{aligned}\sqrt{144}&<\sqrt{145}<\sqrt{169} \\ \Leftrightarrow 12<\sqrt{145}&<13\end{aligned}$$

が成立するため

$$\begin{aligned}&\begin{cases}-\frac{13+9}{2}<-\frac{\sqrt{145}+9}{2}<-\frac{12+9}{2} \\ \frac{12-9}{2}<\frac{\sqrt{145}-9}{2}<\frac{13-9}{2}\end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases}-11<-\frac{\sqrt{145}+9}{2}<-10.5 \\ 1.5<\frac{\sqrt{145}-9}{2}<2\end{cases}\end{aligned}$$

となる。したがって $-\frac{\sqrt{145}+9}{2}\leq x\leq \frac{\sqrt{145}-9}{2}$ を満たす整数 x は $-10\leq x\leq 1$ の範囲に存在し、それらの個数は12である。

(2)

$$\begin{aligned}4^{x-1}-17\cdot 2^{x-1}+16&\leq 0 \\ \Leftrightarrow 4^x-34\cdot 2^x+64&\leq 0\end{aligned}$$

となる。ここで $t=2^x$ とおくと

$$\begin{aligned}t^2-34t+64&\leq 0 \\ \Leftrightarrow (t-2)(t-32)&\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2\leq t\leq 32\end{aligned}$$

が得られる。ゆえに $1\leq x\leq 5$ となる。このとき

$$\begin{aligned}2y-3x-2&\leq 0 \\ \Leftrightarrow y&\leq \frac{3}{2}x+1\end{aligned}$$

であるため、 $1\leq x\leq 5$ のもとで x の値を変化させるときにおいて $y\leq \frac{3}{2}x+1$ を満たす自然数

x, y の組の個数を調べればよい。 $x=1, 2, 3, 4, 5$ のとき、それぞれ $y\leq \frac{5}{2}$ 、 $y\leq 4$ 、 $y\leq \frac{11}{2}$ 、

$y\leq 7$ 、 $y\leq \frac{17}{2}$ となるため、これらを満たす自然数 y の数はそれぞれ2個、4個、5個、7個、

8個である。ゆえに求める自然数 x, y の組の個数は

$$2+4+5+7+8=26$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned}\log_3(x+y-3) \text{ の真数条件より、} &x+y-3>0 \text{ となる。このもとで} \\ \log_3(x+y-3)&\leq 3\log_3 2 \\ \Leftrightarrow \log_3(x+y-3)&\leq \log_3 8 \\ \Leftrightarrow x+y-3&\leq 8 \text{ (}\because \text{底:}3>1\text{)}\end{aligned}$$

となるため

$$\begin{aligned}0< x+y-3&\leq 8 \\ \Leftrightarrow 3< x+y&\leq 11\end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに、 x, y が自然数であることを考慮すると、 $x+y$ の取りうる値は

$4\leq x+y\leq 11$ の範囲の自然数となる。ここで、自然数 k に関して $x+y=k$ を満たす自然数

(x, y) の組は

$$(x, y)=(1, k-1), (2, k-2), \dots, (k-1, 1)$$

の $k-1$ 組存在するため、求める自然数 x, y の組の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{11}(k-1)&=\sum_{k=3}^{10}k \\ &=\frac{1}{2}\cdot (3+10)\cdot 8 \\ &=52\end{aligned}$$

となる。

(4)

初項が3、公差が2である等差数列の一般項を a_n とすると

$$\begin{aligned}a_n&=3+2(n-1) \\ &=2n+1\end{aligned}$$

であるため

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\cdot (a_1+a_n)\cdot n \\ &=\frac{1}{2}\cdot (3+2n+1)\cdot n \\ &=n(n+2)\end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$\begin{aligned}S_n&\leq 10000 \\ \Leftrightarrow n(n+2)&\leq 10000 \\ \Leftrightarrow n^2+2n-10000&\leq 0 \\ \Leftrightarrow (n+1)^2-10001&\leq 0 \\ \Leftrightarrow n+1&\leq \sqrt{10001} \text{ (}\because n+1>0\text{)} \\ \therefore n&\leq \sqrt{10001}-1\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $10000<10001<10201$ であることより

$$\begin{aligned}\sqrt{10000}&<\sqrt{10001}<\sqrt{10201} \\ \Leftrightarrow 100<\sqrt{10001}&<101 \\ \Leftrightarrow 99<\sqrt{10001}-1&<100\end{aligned}$$

となる。ゆえに、 $n\leq \sqrt{10001}-1$ を満たす最大の自然数 n は $n=99$ である。

【Ⅱ】

〔解答〕

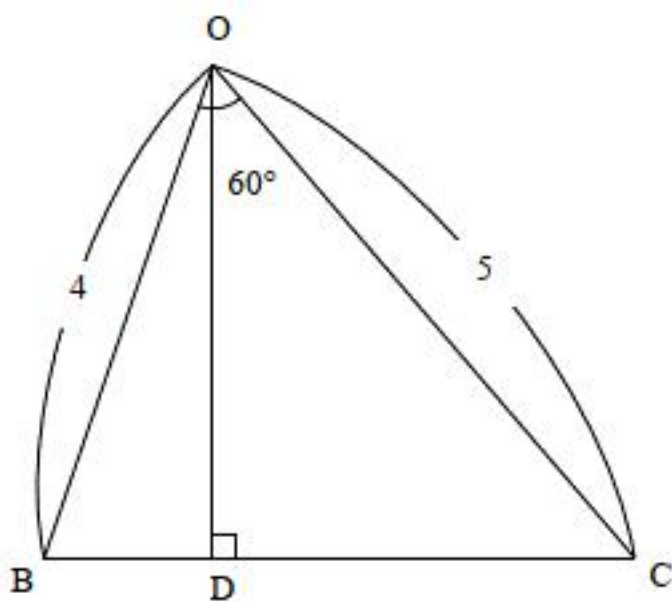
(1)	ケ	5
	コ	7
	サ	2
	シ	7
	ス	1
	セ	0
	ソ	7
	タ	7

(3)	ハ	3
	ヒ	4
	フ	2
	ヘ	9
	ホ	2
	マ	3

(2)	チ	3
	ツ	7
	テ	1
	ト	4
	ナ	1
	ニ	0
	ヌ	1
	ネ	9
	ノ	7

〔解説〕

(1)



Dは直線BC上の点であるため、実数 s を用いて $\overrightarrow{OD} = s\vec{b} + (1-s)\vec{c}$ と表すことができる。このとき、直線ODと直線BCは垂直であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OD} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\vec{c} - \vec{b}) \cdot \{s\vec{b} + (1-s)\vec{c}\} &= 0 \\ \Leftrightarrow -s|\vec{b}|^2 + (2s-1)\vec{b} \cdot \vec{c} + (1-s)|\vec{c}|^2 &= 0\end{aligned}$$

となる。ここで $|\vec{b}|^2 = 16, |\vec{c}|^2 = 25$ であり

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 60^\circ \\ &= 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 10\end{aligned}$$

であるため

$$\begin{aligned}-s|\vec{b}|^2 + (2s-1)\vec{b} \cdot \vec{c} + (1-s)|\vec{c}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -16s + (2s-1) \cdot 10 + (1-s) \cdot 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow -21s + 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{5}{7}\end{aligned}$$

となる。したがって $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ を用いて表すと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{5}{7}\vec{b} + \left(1 - \frac{5}{7}\right)\vec{c} \\ &= \frac{5}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。また、線分ODの長さに関して

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OD}|^2 &= \left|\frac{5}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}\right|^2 \\ &= \frac{25}{49}|\vec{b}|^2 + \frac{20}{49}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{4}{49}|\vec{c}|^2 \\ &= \frac{25}{49} \cdot 16 + \frac{20}{49} \cdot 10 + \frac{4}{49} \cdot 25 \\ &= \frac{100}{7}\end{aligned}$$

であるため

$$\begin{aligned}OD &= \sqrt{\frac{100}{7}} \\ &= \frac{10\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ \\ &= 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 8\end{aligned}$$

であるから、(1)より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} &= \vec{a} \cdot \left(\frac{5}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}\right) \\ &= \frac{5}{7}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{7}\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{60}{7}\end{aligned}$$

である。また、内積の定義より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} &= |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OD}| \cdot \cos \angle AOD \\ &= \frac{40\sqrt{7}}{7} \cos \angle AOD\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}\frac{40\sqrt{7}}{7} \cos \angle AOD &= \frac{60}{7} \\ \therefore \cos \angle AOD &= \frac{3\sqrt{7}}{14}\end{aligned}$$

と求まる。 $0^\circ < \cos \angle AOD < 180^\circ$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin \angle AOD &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle AOD} \\ &= \frac{\sqrt{133}}{14}\end{aligned}$$

である。したがって、三角形OADの面積を S とすれば、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OD}| \cdot \sin \angle AOD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{10\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{\sqrt{133}}{14} \\ &= \frac{10\sqrt{19}}{7}\end{aligned}$$

となる。

(3)

点Eは線分DCを8:7に内分する点であるため

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \frac{8}{15}\overrightarrow{OC} + \frac{7}{15}\overrightarrow{OD} \\ &= \frac{8}{15}\vec{c} + \frac{7}{15} \cdot \left(\frac{5}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}}{3} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) \\ &= \frac{3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}}{9}\end{aligned}$$

である。ここで $|\vec{a}|^2 = 16, \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 10, \vec{a} \cdot \vec{b} = 8$ より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OG}|^2 &= \left|\frac{3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}}{9}\right|^2 \\ &= \frac{1}{81} \left(9|\vec{a}|^2 + 16|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 + 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{a} \cdot \vec{c} + 16\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{81} (144 + 256 + 100 + 192 + 120 + 160) \\ &= \frac{972}{81} \\ &= 12\end{aligned}$$

が得られる。したがって

$$\begin{aligned}OG &= \sqrt{12} \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

である。

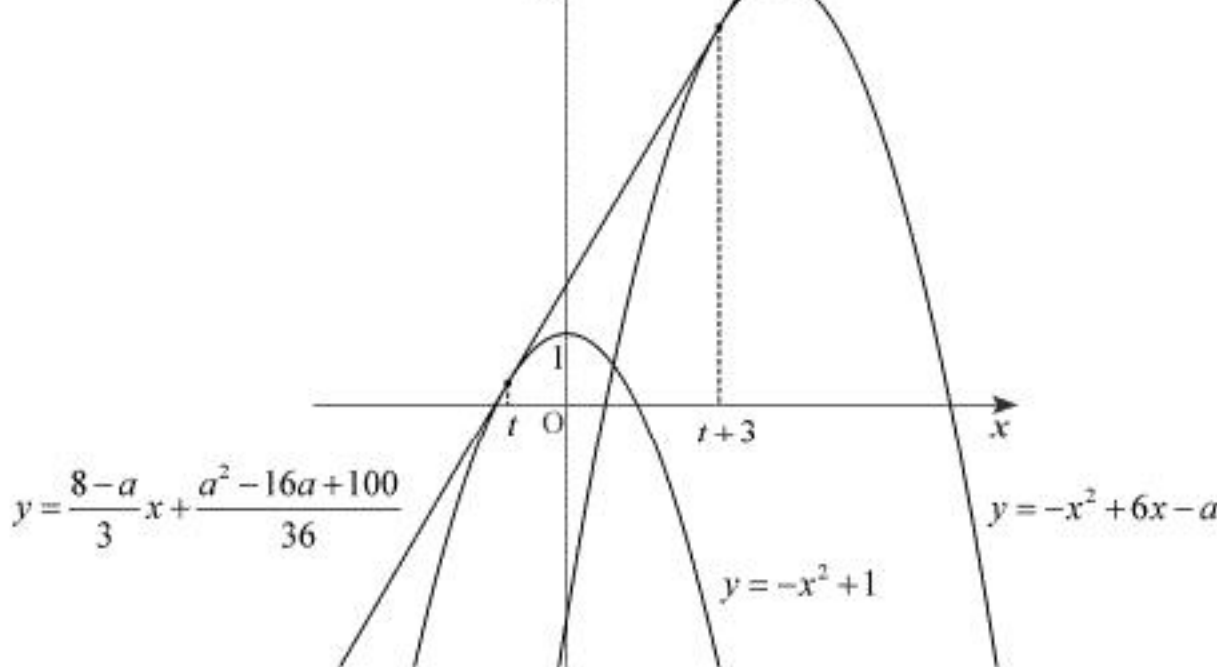
【Ⅲ】

【解答】

(1)	ミ	1
	ム	2
	メ	3
	モ	4
	ヤ	5
	ユ	2
	ヨ	1
	ラ	5
	リ	4
	ル	9
	レ	4

$$(2) \quad y = \frac{8-a}{3}x + \frac{a^2-16a+100}{36}$$

(3)



C_1 と l の接点の x 座標を t とすると、 $t = \frac{a-8}{6}$ である。したがって、 C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} -x^2 + 1 &= -x^2 + 6x - a \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a+1}{6} \\ \Leftrightarrow x &= t + \frac{3}{2} \left(\because t = \frac{a-8}{6} \right) \end{aligned}$$

となる。また、 C_2 と l の接点の x 座標は

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x - a &= \frac{8-a}{3}x + \frac{a^2-16a+100}{36} \\ \Leftrightarrow -x^2 + 6x - (6t+8) &= -2tx + t^2 + 1 \left(\because t = \frac{a-8}{6} \right) \\ \Leftrightarrow x^2 - (2t+6)x + t^2 + 6t + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{x - (t+3)\}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= t+3 \end{aligned}$$

である。よって、上のグラフより、 D の面積を S とすると

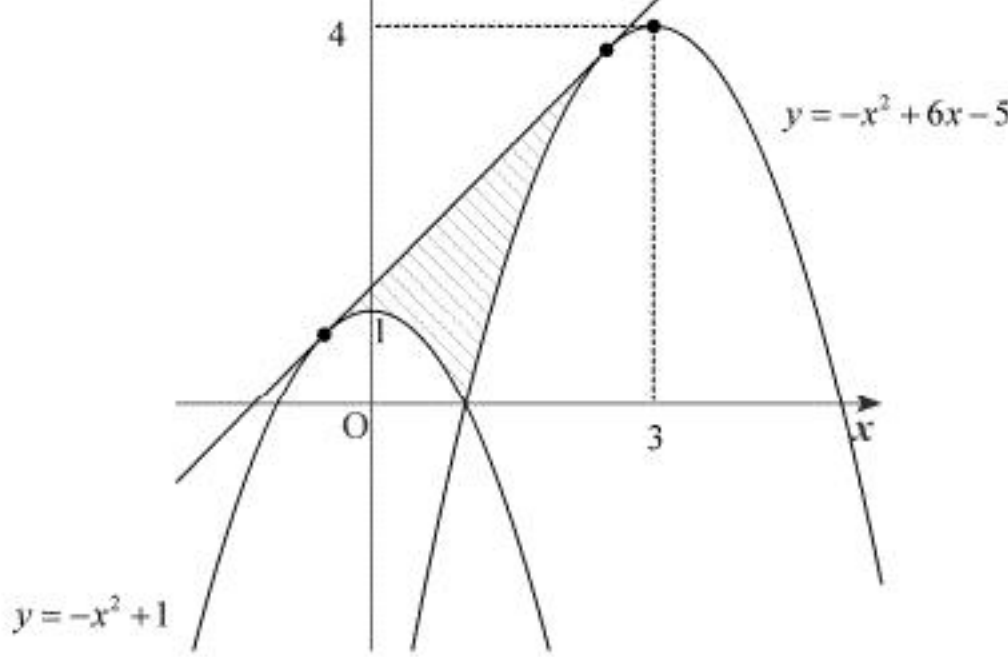
$$\begin{aligned} S &= \int_t^{t+\frac{3}{2}} \{-2tx + t^2 + 1 - (-x^2 + 1)\} dx + \int_{t+\frac{3}{2}}^{t+3} \{-2tx + t^2 + 1 - (-x^2 + 6x - a)\} dx \\ &= \int_t^{t+\frac{3}{2}} (x-t)^2 dx + \int_{t+\frac{3}{2}}^{t+3} \{x - (t+3)\}^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[(x-t)^3 \right]_t^{t+\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \left[\{x - (t+3)\}^3 \right]_{t+\frac{3}{2}}^{t+3} \\ &= \frac{9}{8} + \frac{9}{8} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{9}{4}$

【解説】

(1)



$a=5$ であるとき、放物線 C_2 の方程式は $y = -x^2 + 6x - 5$ と表される。ここで $f(x) = -x^2 + 1$ とする。放物線 C_1 と直線 l との接点を $(t, f(t))$ とおくと、 $f'(x) = -2x$ であることより、 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ \Leftrightarrow y &= -2t(x-t) + (-t^2 + 1) \\ \therefore y &= -2tx + t^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 C_2 と l とが接するとき、 C_2 と l の方程式から y を消去した x の方程式

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x - 5 &= -2tx + t^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(t+3)x + t^2 + 6 &= 0 \end{aligned}$$

が重解を持つ。ゆえに判別式を D として

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+3)^2 - (t^2 + 6) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6t + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} f(t) &= f\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。ゆえに放物線 C_1 と直線 l との接点は $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ となる。また、このとき C_2 と l との接点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x^2 - 2\left(-\frac{1}{2} + 3\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって接点の y 座標は

$$\begin{aligned} y &= -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{5}{2} - 5 \\ &= -\frac{25}{4} + 15 - 5 \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

と表される。ゆえに放物線 C_2 と直線 l との接点は $\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right)$ となる。さらに C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} -x^2 + 1 &= -x^2 + 6x - 5 \\ \Leftrightarrow 6x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

となる。また、 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ \therefore y &= x + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

と表される。したがって、 D は上図の斜線部になるから、 D の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left\{ x + \frac{5}{4} - (-x^2 + 1) \right\} dx + \int_1^{\frac{5}{2}} \left\{ x + \frac{5}{4} - (-x^2 + 6x - 5) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(x + \frac{1}{4} \right) dx + \int_1^{\frac{5}{2}} \left(x - \frac{5}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{5}{2} \right)^3 \right]_1^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{9}{8} + \frac{9}{8} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

となる。

(2)

C_2 の方程式が $y = -x^2 + 6x - a$ と表されるとき、(1)と同様に考えると、 C_2 と l の方程式から y を消去した x の方程式

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x - a &= -2tx + t^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(t+3)x + t^2 + a + 1 &= 0 \end{aligned}$$

が重解を持つ。ゆえに判別式を D として

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+3)^2 - (t^2 + a + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6t + 8 - a &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{a-8}{6} \end{aligned}$$

となる。このとき、 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -2 \cdot \frac{a-8}{6}x + \left(\frac{a-8}{6} \right)^2 + 1 \\ \therefore y &= \frac{8-a}{3}x + \frac{a^2-16a+100}{36} \end{aligned}$$

と表される。