

【1】

【解答】

(1)	1	2							
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ			
	1	1	1	2	1	6			
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ			
	1	4	3	5	2	9			
(4)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	
	2	9	4	3	3	2	8	1	
(5)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	5	2	2	3	2	2	3	2	2
(6)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	
	4	2	5	3	2	5	7	2	

解説]

方程式 $x^2+ax+b=0$ に関して、解と係数の関係より、

$\alpha+\beta=-a$ ・・・①

①

【解説】

(1)

方程式 $x^2+ax+b=0$ に関して、解と係数の関係より、

$$\alpha+\beta=-a \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta=b \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。また、このもとで、方程式 $x^2+(-2a+b+1)x+2a=0$ に関する解と係数の関係より、

$$\alpha^2+\beta^2+2=2a-b-1$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=2a-b-3 \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=2a$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2=2a-1 \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

が成り立つ。②と③を④に代入して、

$$b^2+2a-b-3=2a-1$$

$$\Leftrightarrow b^2-b-2=0$$

$$\Leftrightarrow (b-2)(b+1)=0$$

$$\therefore b=-1, 2$$

を得る。

[1] $b=-1$ のとき

①, ②, ③より、

$$\alpha^2+\beta^2=2a-b-3$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2a-b-3$$

$$\Leftrightarrow a^2-2b=2a-b-3$$

$$\Leftrightarrow a^2-2a+4=0 \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

となるが、⑤の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &=1-4 \\ &=-3 \end{aligned}$$

より $D<0$ であるから、⑤を満たす実数 a は存在しない。

[2] $b=2$ のとき

[1]と同様にして、

$$a^2-2b=2a-b-3$$

$$\Leftrightarrow a^2-2a+1=0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2=0$$

$$\therefore a=1$$

となる。

以上[1], [2]より $a=1, b=2$ である。

(2) ①

$$x-2y=4$$

$$\Leftrightarrow x=2y+4$$

である。これを $ax-by=0$ に代入し

$$a(2y+4)-by=0$$

$$\Leftrightarrow (2a-b)y=-4a$$

が成立する。

[1] $2a-b=0$ のとき

$a\neq 0$ であるから、 $(2a-b)y=-4a$ を満たす y は存在しない。

[2] $2a-b\neq 0$ のとき

$$y=-\frac{4a}{2a-b} \text{ であるから、}$$

$$ax-by=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{4b}{2a-b}$$

となり、連立方程式は解 $(x, y)=\left(-\frac{4b}{2a-b}, -\frac{4a}{2a-b}\right)$ を持つ。

以上[1], [2]より、連立方程式が解を持つ必要十分条件は $2a-b\neq 0$ であることである。

$2a-b=0$ となる (a, b) の組み合わせは

$$(a, b)=(1, 2), (2, 4), (3, 6)$$

のみである。したがって連立方程式が解を持つ確率は

$$1-\frac{3}{36}=\frac{11}{12}$$

である。

②

$a>0, b>0$ であることと①[2]より x, y がともに正となる必要十分条件は $2a-b<0$ となることである。 $2a-b<0$ となる (a, b) の組み合わせは、

$$(a, b)=(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)$$

のみである。よって連立方程式の解 x, y がともに正となる確率は

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

である。

(3)

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}, \overrightarrow{\mathrm{BF}}=\vec{f}$ とおくと、 $|\vec{a}|=1, |\vec{c}|=2, |\vec{f}|=3$ であり、 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{f}=\vec{f}\cdot\vec{a}=0$ が成立する。

ゆえに、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{FD}}|^2 &=|\vec{a}+\vec{c}-\vec{f}|^2 \\ &=|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{f}|^2 \\ &=1+4+9 \\ &=14 \end{aligned}$$

となるため $\mathrm{FD}=\sqrt{14}$ である。また、 I は線分 FD 上の点なので $0< t < 1$ を満たす t を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BI}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{BF}}+t\overrightarrow{\mathrm{BD}} \\ &= t\vec{a}+t\vec{c}+(1-t)\vec{f} \end{aligned}$$

と表すことができる。このとき、 $\overrightarrow{\mathrm{BI}}\perp\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FD}} &=0 \\ \Leftrightarrow \{t\vec{a}+t\vec{c}+(1-t)\vec{f}\}\cdot(\vec{a}+\vec{c}-\vec{f}) &=0 \\ \Leftrightarrow t|\vec{a}|^2+t|\vec{c}|^2-(1-t)|\vec{f}|^2 &=0 \left(\because \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{f}=\vec{f}\cdot\vec{a}=0 \right) \\ \Leftrightarrow 14t-9 &=0 \\ \therefore t &= \frac{9}{14} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{BI}}|^2 &= \left| \frac{9}{14}\vec{a}+\frac{9}{14}\vec{c}+\frac{5}{14}\vec{f} \right|^2 \\ &= \left(\frac{9}{14} \right)^2 |\vec{a}|^2 + \left(\frac{9}{14} \right)^2 |\vec{c}|^2 + \left(\frac{5}{14} \right)^2 |\vec{f}|^2 \left(\because \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{f}=\vec{f}\cdot\vec{a}=0 \right) \\ &= \frac{45}{14} \end{aligned}$$

となるため、 $\mathrm{BI}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$ である。さらに

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{CI}} &= \overrightarrow{\mathrm{BI}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \frac{9}{14}\vec{a}-\frac{5}{14}\vec{c}+\frac{5}{14}\vec{f} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{CI}}|^2 &= \left| \frac{9}{14}\vec{a}-\frac{5}{14}\vec{c}+\frac{5}{14}\vec{f} \right|^2 \\ &= \left(\frac{9}{14} \right)^2 |\vec{a}|^2 + \left(\frac{5}{14} \right)^2 |\vec{c}|^2 + \left(\frac{5}{14} \right)^2 |\vec{f}|^2 \left(\because \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{f}=\vec{f}\cdot\vec{a}=0 \right) \\ &= \frac{29}{14} \end{aligned}$$

より、 $\mathrm{CI}=\sqrt{\frac{29}{14}}$ である。

(4)

$$\begin{aligned} 3x+y &=2 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{3}y+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} xy^2 &= \left(-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3} \right) y^2 \\ &= -\frac{1}{3}y^3+\frac{2}{3}y^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(y)=-\frac{1}{3}y^3+\frac{2}{3}y^2$ とおけば、

$$\begin{aligned} f'(y) &= -y^2+\frac{4}{3}y \\ &= -y\left(y-\frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $f(y)$ の増減表は以下ようになる。

y	0	...	$\frac{4}{3}$	...
$f'(y)$		+	0	-
$f(y)$	0	□	$\frac{32}{81}$	□

よって、 $f(y)$ は $y=\frac{4}{3}$ のとき最大値をとる。また、このとき $x=-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ となる。したが

って xy^2 は $x=\frac{2}{9}, y=\frac{4}{3}$ のとき最大値 $\frac{32}{81}$ をとる。

(5)①

$$\begin{aligned} S_2 &= 3a_2-4 \\ \Leftrightarrow a_1+a_2 &= 3a_2-4 \\ \Leftrightarrow 2a_2 &= 5 \left(\because a_1=1 \right) \\ \therefore a_2 &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

である。

②

また、

$$\begin{aligned} S_{n+1}-S_n &= 3a_{n+1}-2(n+1)-(3a_n-2n) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 3a_{n+1}-3a_n-2 \\ \therefore 2a_{n+1}-3a_n-2 &= 0 \end{aligned}$$

である。

③

$$\begin{aligned} 2a_{n+1}-3a_n-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a_{n+1}+2 &= \frac{3}{2}(a_n+2) \end{aligned}$$

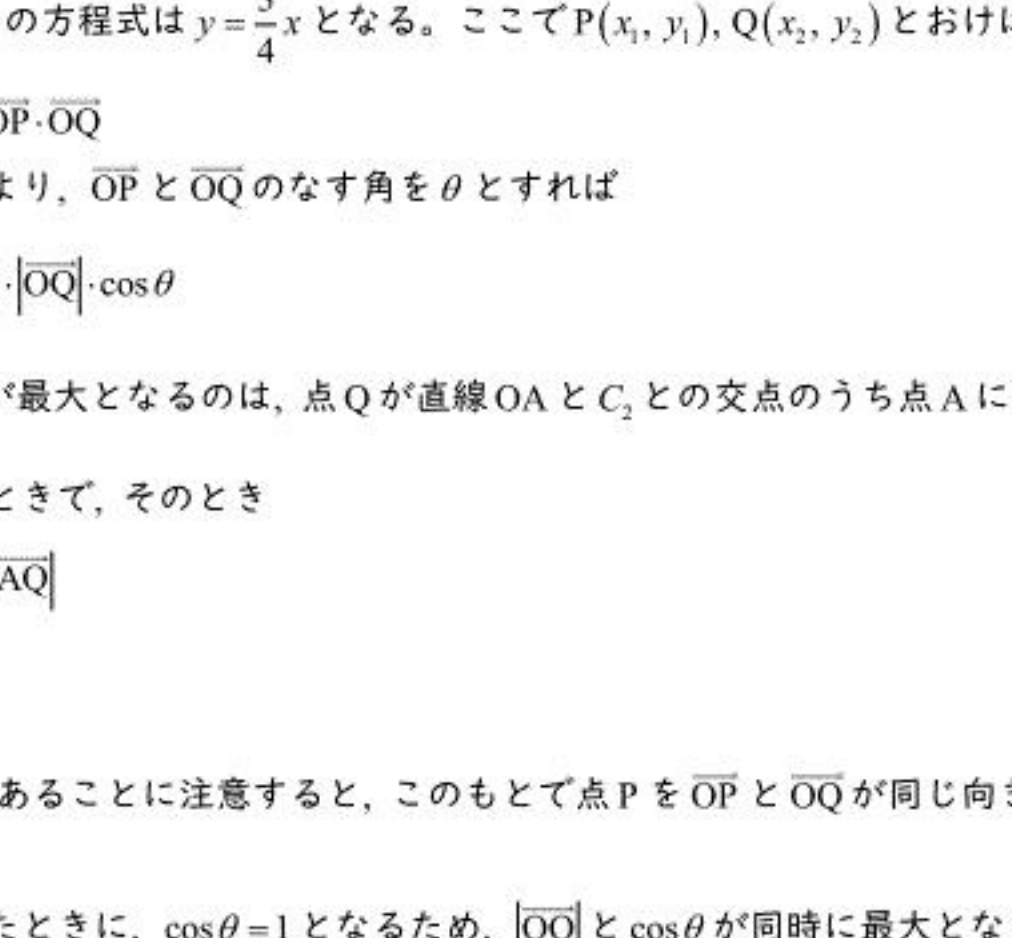
が成立するため、数列 $\{a_n+2\}$ は初項 $a_1+2=3$ 、公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列となる。したがって

$$a_n+2=3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a_n=2\left(\frac{3}{2}\right)^n-2$$

と求まる。

(6)



円 $x^2+y^2=2$ を C_1 とおき、円 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ を C_2 とおく。また、 C_2 の中心 $(4, 3)$ を点 A

とおくとき、直線 OA の方程式は $y=\frac{3}{4}x$ となる。ここで $\mathrm{P}(x_1, y_1), \mathrm{Q}(x_2, y_2)$ とおけば、

$$x_1x_2+y_1y_2=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

である。内積の定義より、 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cdot\cos\theta$$

である。図より $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ が最大となるのは、点 Q が直線 OA と C_2 との交点のうち点 A に関して O

と反対側の点となるときて、そのとき

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| \\ &= 5+2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

となる。 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{2}$ であることに注意すると、このもとで点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が同じ向きで平行

となるように配置したときに、 $\cos\theta=1$ となるため、 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ と $\cos\theta$ が同時に最大となり、

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は最大値をとる。このとき、点 P は直線 OA と C_1 との交点のうち O に関して点 A と同じ側の点となるため、点 P の座標は

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=\frac{3}{4}x \end{cases}$$

を連立し

$$x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16}x^2=2$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{4\sqrt{2}}{5}$$

となることより、 $\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}, \frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$ である。以上より、 $x_1x_2+y_1y_2$ は $x_1=\frac{4\sqrt{2}}{5}, y_1=\frac{3\sqrt{2}}{5}$ のとき最大

値をとり、その値は

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cdot\cos\theta &= \sqrt{2}\cdot 7\cdot 1 \\ &= 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

【II】

〔解答〕

(1)	$x \cos \theta + y \sin \theta = 1$
(2) $\sin \theta$ の式	$\beta - \alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{4}{\sin \theta}} + 7$
t の式	$\beta - \alpha = \sqrt{t^2 - 4t + 7}$
(3) P	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$
Q	$(0, 2)$ または $(\sqrt{3}, -1)$
R	$(\sqrt{3}, -1)$ または $(0, 2)$

〔解説〕

(1)

円の接線は、中心と接点を通る直線に直交し、接点を通る直線であるから、その方程式は

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 1$$

で与えられる。

(2)

$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $0 < \sin \theta \leq 1$ であるから、(1)より

$$y = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}x + \frac{1}{\sin \theta}$$

となる。これを $y = 2 - x^2$ に代入して

$$2 - x^2 = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}x + \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}x + \frac{1}{\sin \theta} - 2 = 0$$

を得る。この x の2次方程式の2解が α, β であるため、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{\sin \theta} - 2$$

である。したがって

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{4}{\sin \theta} + 8 \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{4}{\sin \theta} + 7 \end{aligned}$$

であり、 $\beta - \alpha > 0$ であるから、

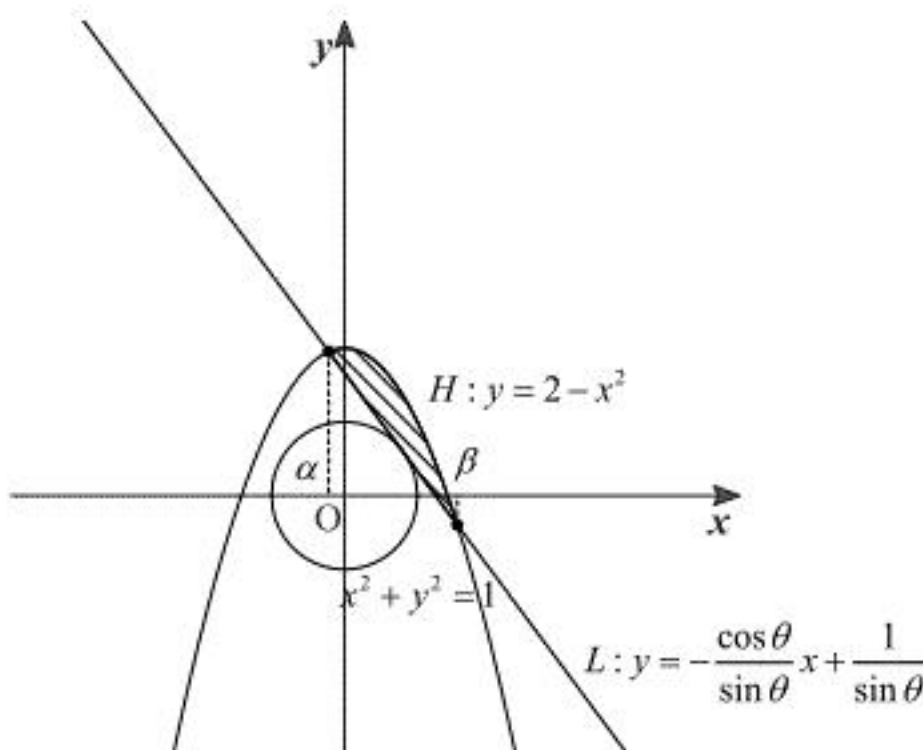
$$\beta - \alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{4}{\sin \theta} + 7}$$

である。 $t = \frac{1}{\sin \theta}$ とおけば、

$$\beta - \alpha = \sqrt{t^2 - 4t + 7}$$

となる。

(3)



図より、 L と H で囲まれる部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(2 - x^2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}x - \frac{1}{\sin \theta} \right) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} -(x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{4}{\sin \theta} + 7 \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\frac{1}{\sin \theta} = t$ とおけば、 $t \geq 1$ であって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6} (t^2 - 4t + 7)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ (t - 2)^2 + 3 \right\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。したがって、 S は $t = 2$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。このとき、 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ であり、

$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。また、 α, β は

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}x + \frac{1}{\sin \theta} - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}x + \frac{1}{\frac{1}{2}} - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{3}x &= 0 \end{aligned}$$

の解であるから、

$$\alpha = 0, \beta = \sqrt{3} \quad (\because \alpha < \beta)$$

となる。よって、 $Q(0, 2), R(\sqrt{3}, -1)$ または $Q(\sqrt{3}, -1), R(0, 2)$ である。