

[I]

[解答]

I
G

[解説]

与えられた関係式を変形すると、

$$\begin{aligned}\frac{(x+y+z)-z}{5} &= \frac{(x+y+z)-x}{6} = \frac{(x+y+z)-y}{7} \\ \Leftrightarrow \frac{27-z}{5} &= \frac{27-x}{6} = \frac{27-y}{7}\end{aligned}$$

となる。これより、実数 a を用いて

$$\begin{cases} 27-z=5a \\ 27-x=6a \\ 27-y=7a \end{cases}$$

と表すことができる。よって、 $x+y+z=27$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}(27-z)+(27-x)+(27-y) &= 5a+6a+7a \\ \Leftrightarrow 81-(x+y+z) &= 18a \\ \Leftrightarrow 18a &= 54 \\ \Leftrightarrow a &= 3\end{aligned}$$

となる。これより、 x 、 y 、 z の値はそれぞれ

$$\begin{cases} x=27-6\cdot 3=9 \\ y=27-7\cdot 3=6 \\ z=27-5\cdot 3=12 \end{cases}$$

となり、求める値は

$$xyz=9\cdot 6\cdot 12=648$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

101
$\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right)$

〔解説〕

x 成分が正である $\vec{p}$ の成分表示を

$$(s, t, u) \quad (s > 0)$$

と表すことにする。 $\vec{p}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に垂直なので、

$$\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot s + (-1) \cdot t + 3 \cdot u = 0$$

$$\Leftrightarrow 2s - t + 3u = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot s + (-2) \cdot t + 3 \cdot u = 0$$

$$\Leftrightarrow 5s - 2t + 3u = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、 $\vec{p}$ の大きさは $\sqrt{7}$ であるので、

$$|\vec{p}| = \sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{p}|^2 = 7 \quad (\because |\vec{p}| > 0)$$

$$\Leftrightarrow s^2 + t^2 + u^2 = 7 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。ここで、 $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より、

$$(5s - 2t + 3u) - (2s - t + 3u) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 3s \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。また、 $\textcircled{4}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$2s - 3s + 3u = 0$$

$$\Leftrightarrow s = 3u \quad \dots \textcircled{5}$$

となり、 $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ より、

$$t = 9u \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。以上より、 s , t , u の関係式を導いたので、 $\textcircled{5}$ および $\textcircled{6}$ を $\textcircled{3}$ に代入すると、

$$(3u)^2 + (9u)^2 + u^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow 91u^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow u = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}$$

となる。 $s > 0$, $s = 3u$ より $u > 0$ であるので、 u の値は

$$u = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

となり、 $\vec{p}$ の成分表示は

$$\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right)$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

102
$-5 \leq x < 3, 3 < x \leq 4$

〔解説〕

与えられた不等式を解くと、

$$\begin{aligned}
 &|x^2 + 6x - 27| > 0 \\
 &\Leftrightarrow |(x+9)(x-3)| > 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)(x-3) > 0 & (x \leq -9, x \geq 3) \\ -(x+9)(x-3) > 0 & (-9 < x < 3) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x < -9, -9 < x < 3, 3 < x \qquad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となり、また、

$$\begin{aligned}
 &-x^2 - x + 20 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow -(x+5)(x-4) \geq 0 \\
 &-5 \leq x \leq 4 \qquad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

となる。連立方程式の解は①かつ②であるので、求める解は、

$$-5 \leq x < 3, 3 < x \leq 4$$

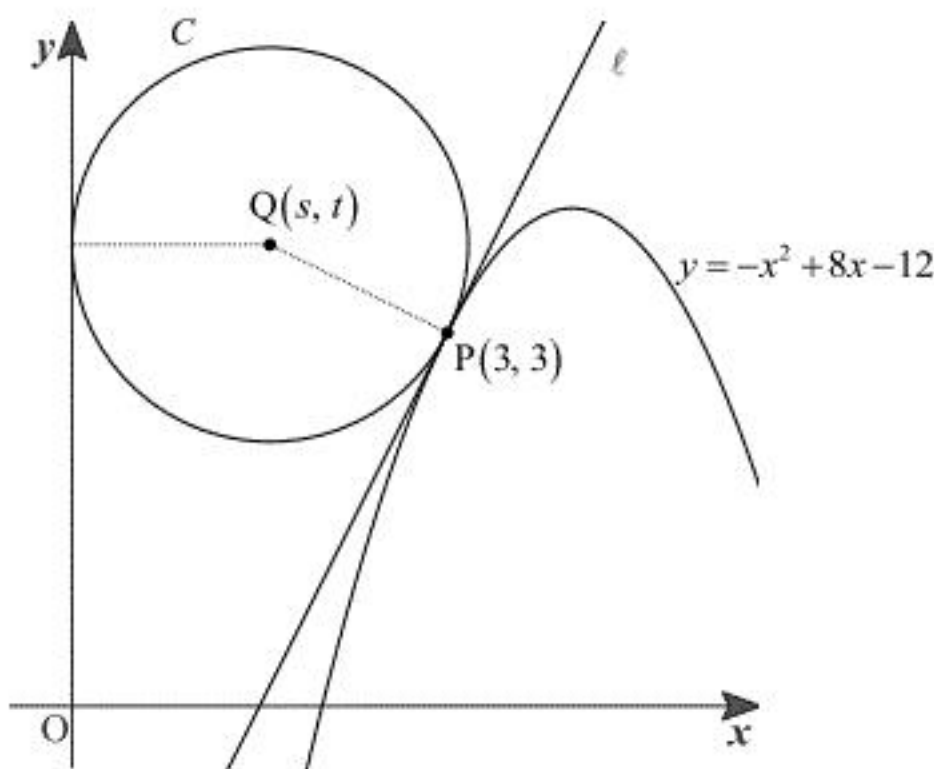
である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

2	3
C	D

〔解説〕



関数 $y = -x^2 + 8x - 12$ を x で微分すると、

$$y' = -2x + 8$$

となる。これより、曲線 $y = -x^2 + 8x - 12$ 上の点 $P(3, 3)$ における接線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y - 3 &= (-2 \cdot 3 + 8)(x - 3) \\ \Leftrightarrow y &= 2x - 3 \end{aligned}$$

である。また、点 P で ℓ に接し、さらに y 軸と接する円のうち、中心の y 座標が正である円を C とし、その円の中心を $Q(s, t)$ ($t > 0$) とする。このとき、円 C の半径は

$$|s|$$

となる。この円は ℓ と点 P で接することから、点 Q と ℓ の距離は $|s|$ であり(・・・①)、かつ直線 PQ は ℓ と直交する(・・・②)とわかる。①より、点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned} \frac{|2s - t - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} &= |s| \\ \Leftrightarrow |2s - t - 3| &= \sqrt{5}|s| \\ \Leftrightarrow (2s - t - 3)^2 &= 5s^2 \\ \Leftrightarrow s^2 + 4st - t^2 + 12s - 6t - 9 &= 0 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。また、②より、直線 PQ の傾きは

$$-\frac{1}{2}$$

となるので、これより、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= \frac{3 - t}{3 - s} \\ \Leftrightarrow 3 - s &= -2(3 - t) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{9 - s}{2} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

が導ける。④を③に代入すると、

$$\begin{aligned} s^2 + 4s \cdot \frac{9 - s}{2} - \left(\frac{9 - s}{2}\right)^2 + 12s - 6 \cdot \frac{9 - s}{2} - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2 + (-2s^2 + 18s) - \left(\frac{1}{4}s^2 - \frac{9}{2}s + \frac{81}{4}\right) + 12s - (27 - 3s) - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{5}{4}s^2 + \frac{75}{2}s - \frac{225}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2 - 30s + 45 &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= 15 \pm 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。 $t > 0$ より、 s の値は

$$s = 15 - 6\sqrt{5}$$

となるので、円の半径は

$$|s| = 15 - 6\sqrt{5}$$

である。

[V]

[解答]

4	5
E	E

[解説]

縦の長さを x cm とすると、

横の長さは $(20-4x)$ cm、高さは $3x$ cm

と表すことができる。これより、求める四角錐の体積を $V\text{cm}^3$ とすると、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot x(20-4x) \cdot 3x \\ &= 20x^2 - 4x^3 \end{aligned}$$

となる。ここで $f(x) = 20x^2 - 4x^3$ とすると、

$$f'(x) = 40x - 12x^2 = 12x \left(\frac{10}{3} - x \right)$$

となる。底面の縦の長さ x cm が 3 cm 以上 4 cm 以下であることから、 $3 \leq x \leq 4$ の範囲で $f(x)$ の増減を考える。

x	3	...	$\frac{10}{3}$	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	72	↗	$\frac{2000}{27}$	↘	64

増減表は上の通りなので、これより四角錐の体積について、

$$\text{最大値は } f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{2000}{27} \text{ cm}^3$$

$$\text{最小値は } f(4) = 64 \text{ cm}^3$$

となる。

〔VI〕

〔解答〕

6	7	8	9
D	B	E	D

〔解説〕

(1)

この小問において、1回の操作で x 軸方向に $+1$ 進む確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 、 y 軸方向に $+1$ 進む確率は

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。さいころを4回投げたとき P が $(3, 1)$ の位置にあるのは、1から4の目が3回、

5または6の目が1回出たときであるから、このような確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot {}_4C_1 = \frac{32}{81}$$

である。また、さいころを4回投げたとき P が $(1, 1)$ を通って $(2, 2)$ の位置にあるのは、1回目から2回目までに1から4の目と5または6の目が1回ずつ出て、また3回目から4回目までも同様に1から4の目と5または6の目が1回ずつ出たときであるから、このような確率は

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot {}_2C_1\right)^2 = \frac{16}{81}$$

である。

(2)

この小問において、1回の操作で x 軸方向に $+1$ 進む確率、 x 軸方向に -1 進む確率、 y 軸方向

に $+1$ 進む確率は全て等しく $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。さいころを10回投げたとき P が原点にあるのは、

1または3の目が5回、2または4の目が5回出たときであるから、このような確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot {}_{10}C_5 = \frac{28}{6561}$$

である。また、さいころを10回投げたとき P が $(6, 4)$ の位置にあるのは、1または3の目が6回、5または6の目が4回出たときであるから、このような確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot {}_{10}C_6 = \frac{70}{19683}$$

である。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

10	11	12
F	H	A

〔解説〕

3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{a^2-3a}$, $6-a$, 2 で表され, 長さ $\sqrt{a^2-3a}$ の辺が他の 2 辺よりも長い

三角形が存在するための必要十分条件は

$$\begin{cases} \sqrt{a^2-3a} > 6-a & \cdots \textcircled{1} \\ \sqrt{a^2-3a} > 2 & \cdots \textcircled{2} \\ \sqrt{a^2-3a} < (6-a)+2 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

のすべてが成り立つことである。 $\sqrt{a^2-3a}=\sqrt{a(a-3)}$ の定義域と $6-a>0$ であることに注意して①を解くと,

$$\begin{aligned} a < 0, 3 < a \text{ かつ } a^2-3a > (6-a)^2 \\ \Leftrightarrow a < 0, 3 < a \text{ かつ } 9a > 36 \\ \Leftrightarrow a < 0, 3 < a \text{ かつ } a > 4 \\ \Leftrightarrow a > 4 \end{aligned}$$

となる。同様に②を解くと,

$$\begin{aligned} a < 0, 3 < a \text{ かつ } a^2-3a > 4 \\ \Leftrightarrow a < 0, 3 < a \text{ かつ } (a+1)(a-4) > 0 \\ \Leftrightarrow a < 0, 3 < a \text{ かつ } a < -1, a > 4 \\ \Leftrightarrow a < -1, a > 4 \end{aligned}$$

となり, また同様に③を解くと,

$$\begin{aligned} a < 0, 3 < a \text{ かつ } a^2-3a < (8-a)^2 \\ \Leftrightarrow a < 0, 3 < a \text{ かつ } 13a < 64 \\ \Leftrightarrow a < 0, 3 < a \text{ かつ } a < \frac{64}{13} \\ \Leftrightarrow 3 < a < \frac{64}{13} \end{aligned}$$

となる。以上より, 求める条件は①かつ②かつ③であるので,

$$4 < a < \frac{64}{13}$$

である。また, この三角形の 3 つの内角のうちで最大の角 θ は長さが $6-a$, 2 である 2 つの辺が挟む角であるので, 余弦定理より,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(6-a)^2 + 2^2 - (\sqrt{a^2-3a})^2}{2(6-a) \cdot 2} \\ &= \frac{(a^2-12a+36)+4-(a^2-3a)}{4(6-a)} \\ &= \frac{40-9a}{4(6-a)} \end{aligned}$$

となる。

〔Ⅷ〕

〔解答〕

13	14	15	103
G	D	I	$\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}$

〔解説〕

(1)

題意より、 n が 3 以上のとき、線分 $A_{n-1}A_{n-2}$ 上に $A_{n-1}A_n$ が $A_{n-1}A_{n-2}$ の長さの $\frac{3}{4}$ 倍になるように

A_n をとる。 $n=2$ のときの直径 A_1A_2 は $\frac{3}{4}$ であることに注意すると、 $n=2$ のときの直径は

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

である。このように、 n の値が 1 大きくなると直径が $\frac{3}{4}$ 倍されることから、 S_n の直径は

$$1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

である。よって、このとき半円弧 S_n の弧の長さは

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \pi$$

である。

(2)

A_n の x 座標を a_n と表すことにする。 $n \geq 1$ について、 n が偶数のとき A_n は A_{n-1} より x 軸負方向にあり、 n が奇数のとき A_n は A_{n-1} より x 軸正方向にあることから、

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + (-1)^{n-1} A_{n-1}A_n \\ &= a_{n-1} + (-1)^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ &= a_{n-1} + \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

と表される。これより、求める座標は、

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=1}^n \left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 0 + \frac{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{4}{7} \left\{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

である。また、これは $n=0$ でも成立する。