

【I】

【解答】

1.	(1)	(2)
	S	T
2.	(3)	(4)
	B	J
3.	(5)	(6)
	G	L

【解説】

1.

それぞれのカードを引く確率はすべて同様に確からしい。余事象を用いて考える。2回カードを引いたとき、1のカードが含まれない確率は、2, 3, 4, 5のカードの中から2枚のカードを引く確率に等しく、

$$\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{5}$$

である。よって、2回カードを引いたとき、1のカードが含まれる確率は、

$$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

と求まる。また、同様に余事象を用いて考えると、3回カードを引いたとき、1のカードが含まれない確率は、

$$\frac{{}_4C_3}{{}_5C_3} = \frac{2}{5}$$

である。よって、3回カードを引いたとき、1のカードが含まれる確率は、

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

と求まる。

2.

関数 $f(x) = 2x^3 - 3(a-1)x^2 - 6ax$ ($a > 0$) において、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6(a-1)x - 6a \\ &= 6(x-a)(x+1) \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ の増減表は次図の通りである。

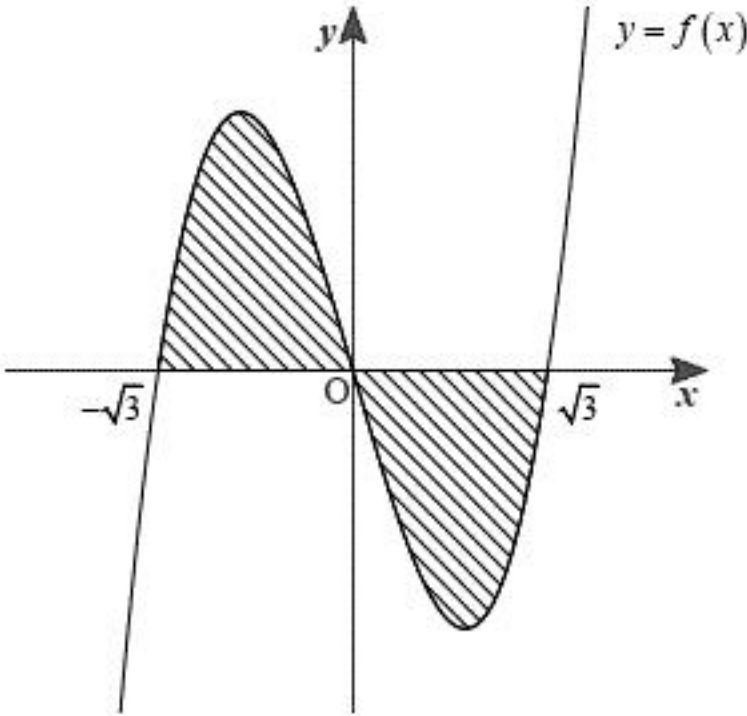
x	...	-1	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	(極大値)	↘	(極小値)	↗

増減表より、関数 $f(x)$ が極小値 -4 をとるとき、

$$\begin{aligned} f(a) &= -4 \\ \Leftrightarrow 2a^3 - 3(a-1)a^2 - 6a^2 &= -4 \\ \Leftrightarrow a^3 + 3a^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(a+2)^2 &= 0 \\ \therefore a &= 1 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

と求まる。また、このとき、 $f(x) = 2x^3 - 6x = 2x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ となるので、曲線 $y = f(x)$

と x 軸で囲まれた図形は次図の斜線部である。



よって、この面積は、 $f(x)$ は奇関数であることに注目すると、

$$2 \int_{-\sqrt{3}}^0 (2x^3 - 6x) dx = 2 \left[\frac{1}{2} x^4 - 3x^2 \right]_{-\sqrt{3}}^0 = 9$$

と求まる。

3.

$\int_0^1 a_k x^k (1-x) dx$ において、 a_k は定数であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^1 a_k x^k (1-x) dx &= 1 \\ \Leftrightarrow a_k \left(\left[\frac{1}{k+1} x^{k+1} (1-x) \right]_0^1 + \frac{1}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} dx \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow a_k \left[\frac{1}{(k+1)(k+2)} x^{k+2} \right]_0^1 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{a_k}{(k+1)(k+2)} &= 1 \\ \Leftrightarrow a_k &= k^2 + 3k + 2 \quad (1 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 3k + 2) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{3}{2} n(n+1) + 2n \\ &= \frac{n}{6} \{ (n+1)(2n+1) + 9(n+1) + 12 \} \\ &= \frac{n}{3} (n^2 + 6n + 11) \end{aligned}$$

と求まる。

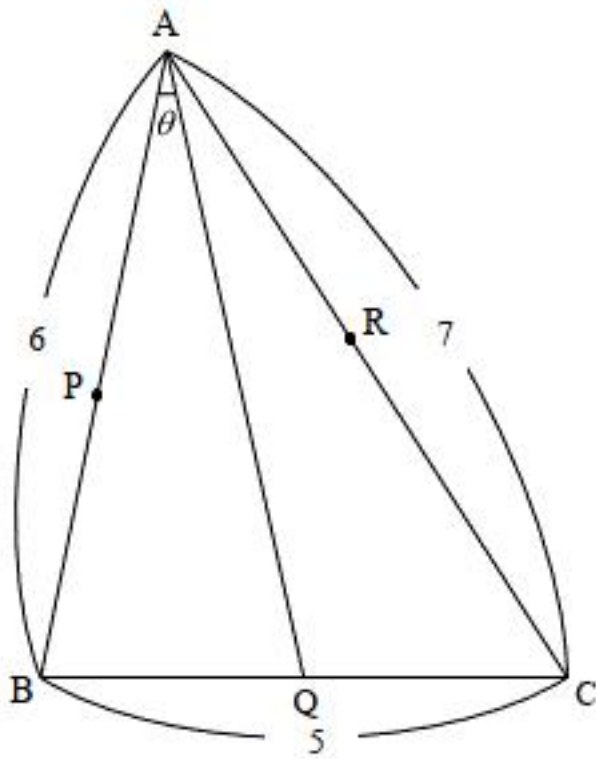
【Ⅱ】

【解答】

1.	ア	イ	ウ	エ	オ
	5	7	2	6	7
	カ	キ	ク	ケ	コ
	1	5	2	6	5
2.	サ	シ	ス	セ	ソ
	2	6	5	1	5
3.	タ	チ	ツ	テ	
	1	2	6	5	
4.	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
	9	0	2	6	5
	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ
	1	2	6	5	2

【解説】

1.



△ABCにおいて、余弦定理より、

$$\cos \angle A = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{5}{7}$$

となり、よって、

$$\begin{aligned} \sin \angle A &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{7} \end{aligned}$$

と求まる。また、同様にして、

$$\cos \angle B = \frac{6^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{5} \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \sin \angle B &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{aligned} \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

と求まる。

2.

△ABQに注目すると、 $\angle AQB = 180^\circ - (\angle B + \theta)$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin \angle AQB &= \sin \{180^\circ - (\angle B + \theta)\} \\ &= \sin (\angle B + \theta) \quad \dots \dots \textcircled{3} \\ &= \sin \angle B \cdot \cos \theta + \cos \angle B \cdot \sin \theta \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos \theta + \frac{1}{5} \sin \theta \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}) \end{aligned}$$

と求まる。

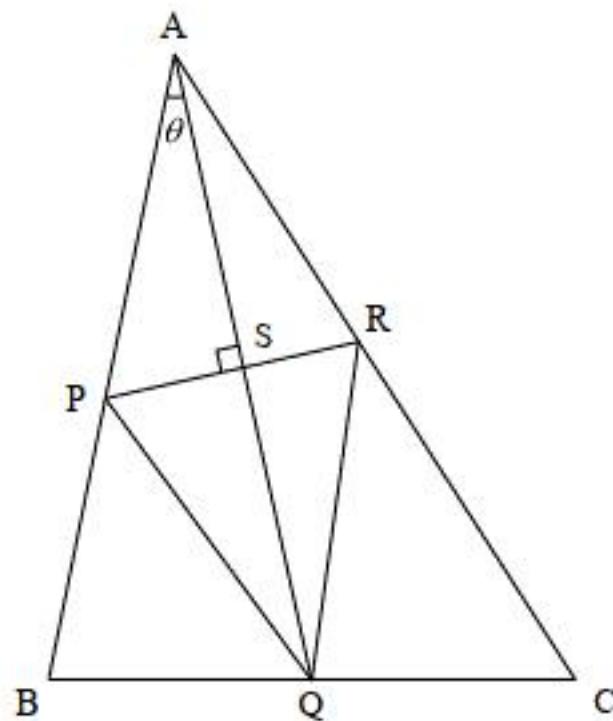
3.

△ABQにおいて、正弦定理より、

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin \angle AQB} &= \frac{AQ}{\sin \angle B} \\ \Leftrightarrow AQ &= \frac{6}{\sin (\angle B + \theta)} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{12\sqrt{6}}{5 \sin (\angle B + \theta)} \quad (\because \textcircled{2}, \textcircled{3}) \quad \dots \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

と求まる。

4.



点Aと点Qは線分PRに対して対称であるから、 $\angle ASP = 90^\circ$ である。また、積和の公式より、

$$\begin{aligned} 2 \sin (\angle B + \theta) \cos \theta &= \sin (\angle B + 2\theta) + \sin \angle B \\ &= \sin (\angle B + 2\theta) + \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad (\because \textcircled{2}) \quad \dots \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

であり、△APQはPA=PQの二等辺三角形であるから、 $\angle ASP = 90^\circ$ と合わせると

$AS = \frac{1}{2}AQ$ となる。よって、△APSに注目すると、

$$\begin{aligned} AP &= \frac{AS}{\cos \theta} \\ &= \frac{1}{2}AQ \cdot \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \frac{6\sqrt{6}}{5 \sin (\angle B + \theta) \cos \theta} \quad (\because \textcircled{4}) \\ &= \frac{12\sqrt{6}}{5 \sin (\angle B + 2\theta) + 2\sqrt{6}} \quad (\because \textcircled{5}) \end{aligned}$$

と求まる。

【Ⅲ】

1.

0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1の8個の順列であるから、その総数は

$$\frac{8!}{4!4!} = 70 \text{ (個)}$$

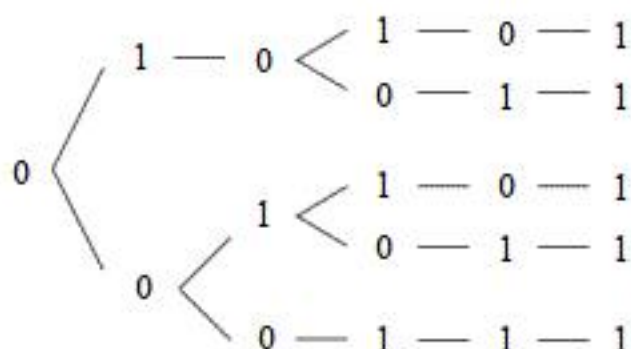
と求まる。

(答) 70 個

2.

(i)

それぞれ3個の0と1からなる長さ6の01列 A で、すべての $i=1, 2, \dots, 6$ について、 $x_i(A) \geq y_i(A)$ を満たすものを樹形図を用いて考えると、次図の通りである。



よって、樹形図より、求めるものの総数は5個である。

(答) 5 個

(ii)

まず長さ $2n$ の数列 A に対して $(\#)$ を行うと最終的に長さ0の01列にたどり着くためには、全ての $1 \leq i \leq n$ について $x_i(A) \geq y_i(A)$ であることが必要であることを示す。 $(\#)$ の逆、すなわち長さ0の01列から01を01列の隣接する成分の間に加える操作を繰り返し、最終的にそれぞれ n 個の0と1からなる長さ $2n$ の01列 A をつくることを考える。このとき、つくられた01列 A の i ($1 \leq i \leq n$) 番目の1の前には必ず0が i 個以上存在することは操作の手順から明らかである。よって、それぞれ n 個の0と1からなる長さ $2n$ の01列 A に対して $(\#)$ を行い、最終的に長さ0の01列にたどり着くとき、すべての $1 \leq i \leq n$ について $x_i(A) \geq y_i(A)$ となる。次に全ての $1 \leq i \leq n$ について $x_i(A) \geq y_i(A)$ であるとき $(\#)$ を行うと最終的に長さ0の01列にたどり着くことを示す。この命題を $(*)$ とおき、 n についての数学的帰納法を利用して $(*)$ を示す。

[1] $n=1$ のとき

$x_1(A) \geq y_1(A)$ より、01列 A は $A=01$ であるから、 $(\#)$ を行うと長さ0の01列にたどり着くため、 $(*)$ は成立する。

[2] $n=k$ のとき $(*)$ は成立すると仮定する

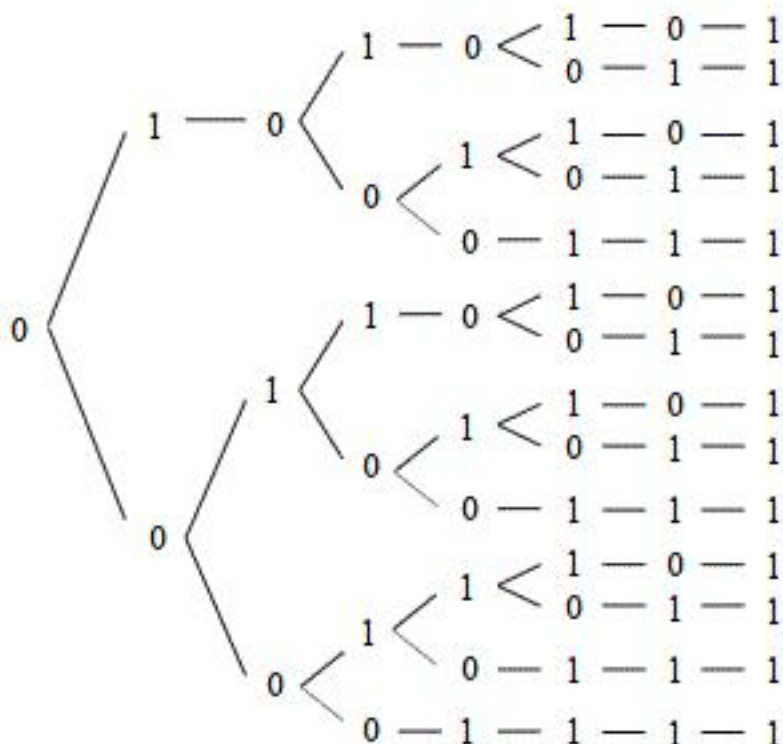
$n=k+1$ のときにおける01列 A は $x_i(A) \geq y_i(A)$ を満たすから、 A は01という配列を必ず含んでいる。その部分を $(\#)$ を行い取り除くことで、長さ $2k$ の01列ができる。 $n=k$ のとき命題は成り立つから、その長さ $2k$ の01列は $(\#)$ を繰り返し行うことで長さ0の01列にたどり着く。よって、 $n=k$ のとき $(*)$ が成立するとき、 $n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する。

以上[1], [2]より、全ての自然数 n について $(*)$ は成立することが示された。よって、それぞれ n 個 ($n \geq 1$) の0と1からなる長さ $2n$ の01列 A に対して、 $(\#)$ を行い、最終的に長さ0の01列にたどり着くための必要十分条件は、すべての $1 \leq i \leq 2n$ について、 $x_i(A) \geq y_i(A)$ であることが示された。

(証明終)

(iii)

(ii)の結果より、それぞれ4個の0と1からなる長さ8の01列で、すべての $i=1, 2, \dots, 8$ について、 $x_i(A) \geq y_i(A)$ を満たすものの総数を求めればよい。(i)と同様に樹形図を用いて考えると、次図の通りである。



よって、樹形図より、求めるものの総数は14個である。

(答) 14 個