

【 I 】

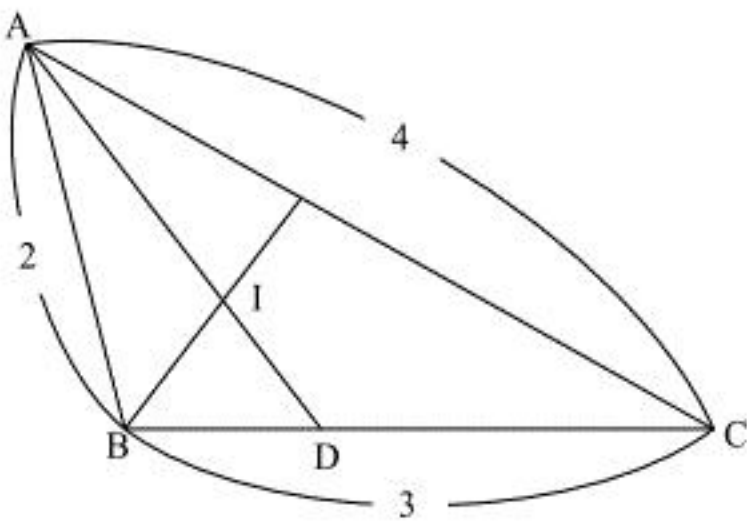
〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ
	4	9	2	9
(2)	オ	カ		
	1	9		

〔解説〕

(1)

2 直線 AI, BC の交点を D とおく。



角の二等分線の性質より $BD:DC=2:4=1:2$ であるから、D は辺 BC を $1:2$ に内分する点である。ゆえに

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{1+2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+2}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$BD = \frac{1}{1+2} \cdot BC = 1$$

が得られる。同様に、角の二等分線の性質より $AI:ID=AB:BD=2:1$ と分かるから、I は線分 AD を $2:1$ に内分する点となる。以上より

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{2+1}\overrightarrow{AD} = \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

と求められる。

(2)

さいころを 1 回投げる試行において、出る目 6 通りは同様に確からしい。ここで、C は 3 以下

の目が出る事象であるから $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ である。また、D は空事象でないため、

$P(D) \neq 0$ となる。よって、事象 C, D が独立となるとき、

$$\begin{aligned} P(C \cap D) &= P(C)P(D) \\ \Leftrightarrow \frac{P(C \cap D)}{P(D)} &= P(C) \quad (\because P(D) \neq 0) \\ \Leftrightarrow P_D(C) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が成り立ち、すなわち事象 D のもとで事象 C が起こる条件付き確率が $\frac{1}{2}$ となる。したがっ

て、事象 D において出うる目のうちちょうど半数が 3 以下の目であれば、事象 C, D は独立となる。この条件を満たす事象 D において出うる目の個数は偶数個となるから、以下のように場合分けをして考える。

[1] 事象 D で出うる目が 2 個のとき

事象 D は 3 以下の目と 4 以上の目がそれぞれ 1 個ずつ出うる事象である。このような事象は ${}_3C_1 \cdot {}_3C_1 = 9$ (個) 存在する。

[2] 事象 D で出うる目が 4 個のとき

事象 D は 3 以下の目と 4 以上の目がそれぞれ 2 個ずつ出うる事象である。このような事象は ${}_3C_2 \cdot {}_3C_2 = 9$ (個) 存在する。

[3] 事象 D で出うる目が 6 個のとき

事象 D は全ての目が出うる事象である。このような事象は 1 個存在する。

以上 [1] ~ [3] より、求める事象 D の個数は

$$9 + 9 + 1 = 19 \text{ (個)}$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

あ	$k \leq 0, k > \frac{1}{3}$
い	$-2+2i$
う	$\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i$

〔解説〕

(1)

与えられた方程式を変形すると

$$kx^3 - x^2 + 4k = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 4)k = x^2$$

となる。ここで、 $x^3 + 4 = 0$ を満たす実数 x ，すなわち $x = \sqrt[3]{-4}$ はこの方程式の解ではないから、 $x \neq \sqrt[3]{-4}$ の範囲のみを考えれば十分である。ここで、この範囲において方程式は

$$\frac{x^2}{x^3 + 4} = k$$

と変形できるから、 $y = \frac{x^2}{x^3 + 4}$ と直線 $y = k$ のグラフの共有点が1個となるような k の範囲を

求めれば十分である。いま、 $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 4}$ とおくと

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^3 + 4) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 + 4)^2} = \frac{-x(x^3 - 8)}{(x^3 + 4)^2}$$

となるから、 $f(x)$ の増減は以下の通りになる。

x	...	$\sqrt[3]{-4}$	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-		-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

増減表より極大値は $f(2) = \frac{2^2}{2^3 + 4} = \frac{1}{3}$ ，極小値は $f(0) = 0$ であり，また

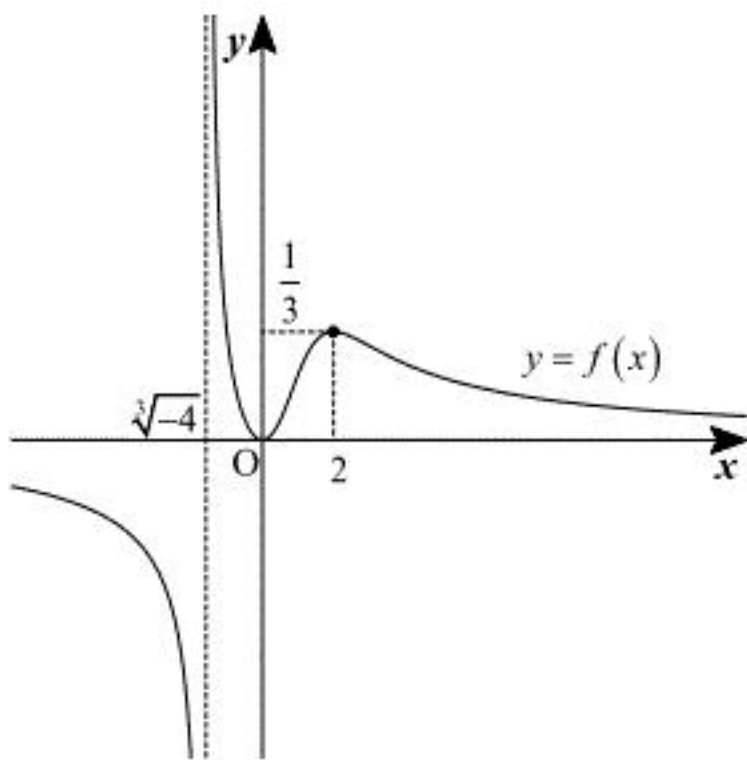
$$\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{-4}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{-4}-0} \frac{x^2}{x^3 + 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{-4}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{-4}+0} \frac{x^2}{x^3 + 4} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x^3}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{4}{x^3}} = 0$$

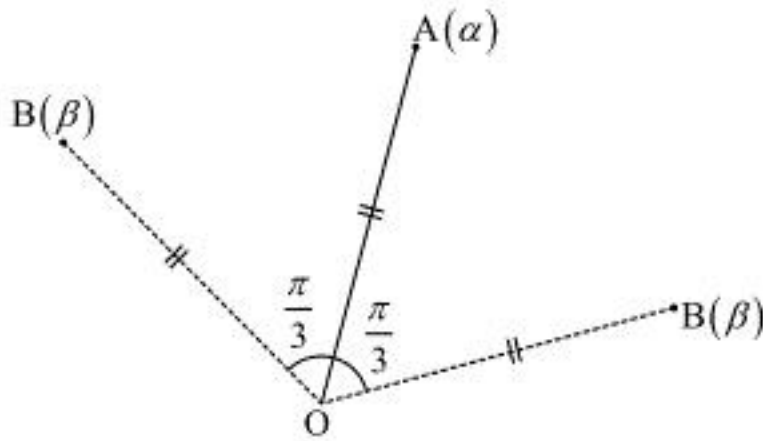
であるから、 $y = f(x)$ のグラフは次図のようになる。



グラフより、求める k の範囲は $k \leq 0, k > \frac{1}{3}$ である。

(2)

複素数平面上において、 $A(\alpha), B(\beta)$ と表される点A, Bを考える。3点 $0, \alpha, \beta$ が正三角形の頂点となるときの、 $B(\beta)$ の位置は次図のように2通り考えられる。



したがって、 β は O を中心に α を $\pm \frac{\pi}{3}$ 回転させた点となるから、

$$\beta - 0 = \left\{ \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \right\} (\alpha - 0)$$

$$\Leftrightarrow \beta = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \{ \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i \}$$

$$\therefore \beta = -2 + 2i, \sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1)i$$

と求められる。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

か

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

き

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

く

$$\frac{\pi}{2}$$

〔解説〕

(1)

半角の公式より,

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

となる。 $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ であるから,

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

と求められる。

(2)

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\pi}{16} &= \frac{1 - \cos \frac{\pi}{8}}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}\end{aligned}$$

である。 $0 < \frac{\pi}{16} < \frac{\pi}{2}$ より $\sin \frac{\pi}{16} > 0$ であるから,

$$\sin \frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}$$

と求められる。

(3)

数学的帰納法を利用して,

$$a_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$2 \cos \frac{\pi}{2^{1+1}} = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

より, ①は $n=1$ のとき確かに成立する。

[2] $n=k$ ($k=1, 2, \dots$) において①が成立すると仮定したとき

仮定より $a_k = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$ となるから,

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= \sqrt{2 + a_k} \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}}{2}} \\ &= 2 \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{2^{k+2}}} \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}} \quad (\because 0 < \frac{\pi}{2^{k+2}} < \frac{\pi}{2} \text{ より } \cos \frac{\pi}{2^{k+2}} > 0)\end{aligned}$$

が得られる。よって仮定のもとで, ①が $n=k+1$ のときにも成立することが示された。

以上[1], [2]より, 数学的帰納法から①が成立することが示された。ここで,

$$\begin{aligned}2^n \sqrt{2 - a_n} &= 2^n \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= 2^{n+1} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}} \\ &= 2^{n+1} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{2^{n+2}}} \\ &= 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \quad (\because 0 < \frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} > 0) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}\end{aligned}$$

であり, $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{\pi}{2^{n+2}} \rightarrow 0$ となるから, 求める極限值は

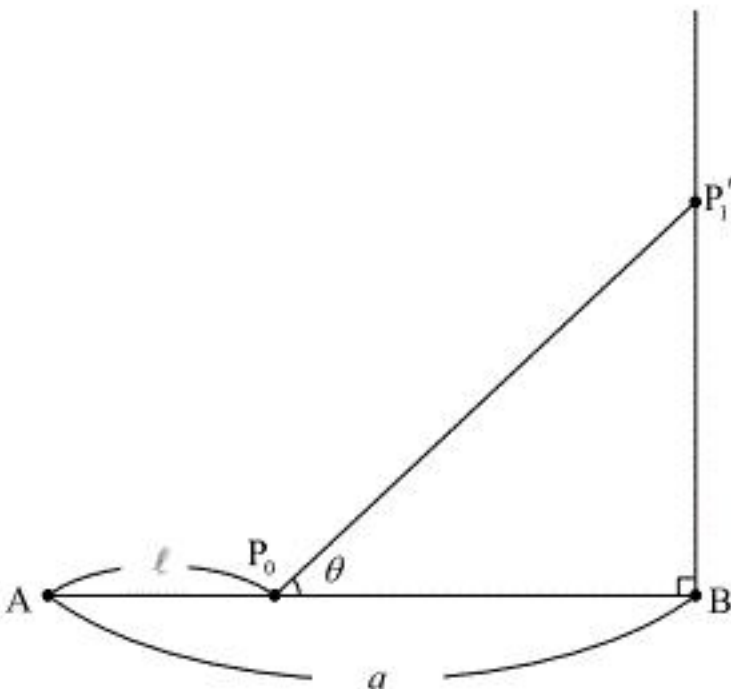
$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sqrt{2 - a_n} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$$

となる。

【Ⅳ】

(1)

直線 P_0P_1 と直線 BC の交点を P_1' とおくと、点 P_1 が辺 BC 上にあるための必要十分条件は「点 P_1' が辺 BC 上にあること」となる。



上図より $BP_1' = BP_0 \tan \theta = (a - \ell) \tan \theta$ と分かるから、求める必要十分条件は

$$BP_1' \leq BC$$

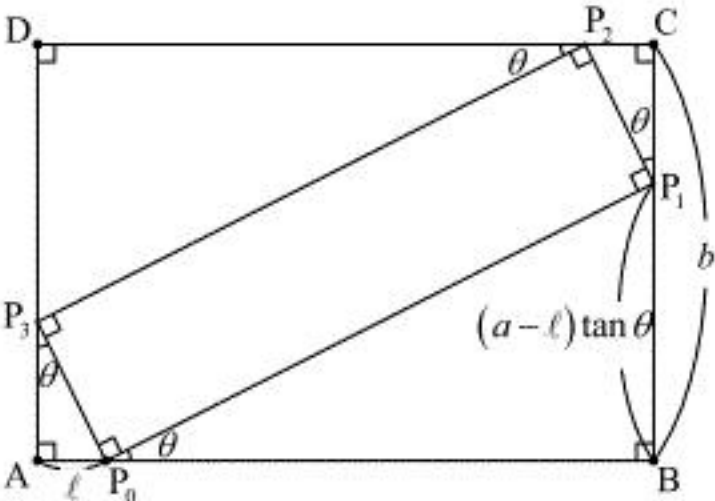
$$\Leftrightarrow (a - \ell) \tan \theta \leq b$$

である。

(答) $(a - \ell) \tan \theta \leq b$

(2)

このとき、各点の位置関係は次図のようになる。



ここで、 $\triangle AP_0P_3$ と $\triangle CP_2P_1$ について

$$P_0P_3 = P_2P_1 \quad (\because \text{四角形 } P_0P_1P_2P_3 \text{ は長方形})$$

$$\angle P_0AP_3 = \angle P_2CP_1 = 90^\circ$$

$$\angle P_0P_3A = \angle P_2P_1C = \theta$$

より $\triangle AP_0P_3 \cong \triangle CP_2P_1$ と分かるから、

$$CP_2 = \ell$$

が得られる。一方、 $CP_1 = BC - BP_1 = b - (a - \ell) \tan \theta$ より、

$$CP_2 = \{b - (a - \ell) \tan \theta\} \tan \theta$$

とも表せる。よってこれらと比較することで

$$\{b - (a - \ell) \tan \theta\} \tan \theta = \ell \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことが分かる。

(3)

「 $a < b$ ならば、すべての $\ell (> 0)$ に対して $\{b - (a - \ell) \tan \theta\} \tan \theta = \ell$ かつ $(a - \ell) \tan \theta \leq b$ を満たす $\theta (0^\circ < \theta < 90^\circ)$ が存在すること」を示したい。ここで、 $\tan \theta = t$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $t > 0$) とおくと、

$$\{b - (a - \ell) \tan \theta\} \tan \theta = \ell \Leftrightarrow (a - \ell) t^2 - bt + \ell = 0$$

$$(a - \ell) \tan \theta \leq b \Leftrightarrow t \leq \frac{b}{a - \ell} \quad (\because a - \ell > 0)$$

と変形できるから、

「 $0 < \ell < a < b$ のとき、2 次方程式 $(a - \ell) t^2 - bt + \ell = 0$ が $0 < t \leq \frac{b}{a - \ell}$ の範囲に実数解をもつこと」

を示せば十分である。ここで、

$$f(t) = (a - \ell) t^2 - bt + \ell$$

$$= (a - \ell) \left(t - \frac{b}{2(a - \ell)} \right)^2 - \frac{b^2 - 4a\ell + 4\ell^2}{4(a - \ell)}$$

とおくと、 $0 < \ell < a < b$ のとき

$$f(0) = \ell > 0$$

$$f\left(\frac{b}{2(a - \ell)}\right) = -\frac{b^2 - 4a\ell + 4\ell^2}{4(a - \ell)}$$

$$= -\frac{(b - 2\ell)^2 + 4b\ell - 4a\ell}{4(a - \ell)}$$

$$= -\frac{(b - 2\ell)^2 + 4(b - a)\ell}{4(a - \ell)}$$

$$< 0$$

となるから、 $f(t) = 0$ は $0 < t < \frac{b}{2(a - \ell)}$ の範囲に実数解を持つ。したがって、 $0 < \ell < a < b$ の

とき 2 次方程式 $(a - \ell) t^2 - bt + \ell = 0$ が $0 < t < \frac{b}{2(a - \ell)} \left(< \frac{b}{a - \ell} \right)$ の範囲に実数解を持つことが示されたため、題意を満たす θ が存在することも示された。

【V】

(1)

$0^0 = 1$ と解釈して問題を解く。

[1] $r \neq 0, 1$ のとき

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

である。

[2] $r = 1$ のとき

$$\sum_{k=0}^n r^k = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$$

である。

[3] $r = 0$ のとき

$$\sum_{k=0}^n r^k = \sum_{k=0}^n 0 = 0^0 + 0^1 + \cdots + 0^n = 0^0 = 1$$

である。

以上[1]～[3]より、これらをまとめると

$$\sum_{k=0}^n r^k = \begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & (r \neq 1) \\ n+1 & (r = 1) \end{cases}$$

となる。

(答) 前述

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-x)^{k-1} dx &= (-1)^{k-1} \int_0^1 x^{k-1} dx \\ &= (-1)^{k-1} \left[\frac{1}{k} x^k \right]_0^1 \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{k} \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

(3)

$0 \leq x \leq 1$ のとき $\frac{1}{1+x} \leq 1$ が成り立つから、両辺に x^n (≥ 0) をかけると

$$\frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

となる。この両辺を共に $0 \leq x \leq 1$ の範囲で積分することで、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx &\leq \int_0^1 x^n dx \\ &= \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \\ \therefore \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx &\leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

が得られる。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^1 (-x)^{k-1} dx \right\} \quad (\because (2)) \\ &= \int_0^1 (-x)^0 dx + \int_0^1 (-x)^1 dx + \cdots + \int_0^1 (-x)^{n-1} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ (-x)^0 + (-x)^1 + \cdots + (-x)^{n-1} \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} \right\} dx \quad (\because (1)) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \\ &= \left[\log(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \\ &= \log 2 - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} |a_n - \log 2| &= \left| - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \right| \\ &= \left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right| \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad (\because 0 \leq x \leq 1 \text{ の範囲で } \frac{x^n}{1+x} \geq 0 \text{ より, } \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \geq 0) \\ &\leq \frac{1}{n+1} \quad (\because (3)) \\ \therefore 0 &\leq |a_n - \log 2| \leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

が成立する。 $n \rightarrow \infty$ とすると $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ となるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \log 2| = 0$$

と分かり、すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \log 2$ が得られる。

(答) $\log 2$