

2020 年度 明治大学

【理 工 学 部】

解答時間 90分

配点 120点

こ

数 学 問 題

注 意

1. この問題冊子は 12 ページあります。試験開始の指示のあとで確認しなさい。ただし、ページ番号のない白紙はページ数に含みません。
2. 解答用紙には表と裏に解答欄があります。また、受験番号が解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と受験票に記されているあなたの受験番号が一致していることを確認しなさい。
3. 監督者の指示に従って、解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔 I 〕の解答は、解答用紙の所定の欄に、下のマーク記入例の良い例のようにマークしなさい。解答欄 1 行につき 2 つ以上マークしてはいけません。2 つ以上マークした場合は、その解答は無効になります。
5. 問題〔 II 〕,〔 III 〕は、解答用紙の所定の欄に解答しなさい。
6. 解答は、鉛筆またはシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入しなさい。
7. マークを訂正するときは、消しゴムできれいに消しなさい。なお、消しクズが解答用紙に残らないようにしなさい。
8. 解答用紙は汚したり折り曲げたりしてはいけません。また所定の欄以外には何も記入してはいけません。
9. 解答用紙は必ず提出しなさい。問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
10. 試験時間は 90 分です。

(マーク記入例)

良い例	悪い例
	

〔Ⅰ〕 次の ア から フ にあてはまる 0 から 9 までの数字を、解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし、スセ は 2 桁の数である。また、分数は既約分数にして解答せよ。

(1) 等式

$$\frac{2x^2 - x - 3}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$$

が x についての恒等式となるように定数 a, b, c を定めると、 $a =$ ア,

$b = -$ イ, $c =$ ウ となる。

(このページは計算や下書きに利用してよい。)

- (2) 四面体 OABC で、 $|\vec{OA}| = \sqrt{3}$, $|\vec{OB}| = 2$, $|\vec{OC}| = \sqrt{5}$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2$,
 $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 2$, $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 1$ を満たすものがある。頂点 O から平面 ABC
 に下ろした垂線と平面 ABC との交点を H とすると、

$$\vec{OH} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \vec{OA} + \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \vec{OB} + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \vec{OC}$$

である。

(このページは計算や下書きに利用してよい。)

(3) A, B, C, D, E の 5 人が, 無作為に並び, 手をつないでひとつの輪を作るという試行を考える。

(a) この試行を 1 回行うとき, A が B と C の 2 人と手をつなぐ確率は

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{コ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{サ} \\ \hline \end{array}} \text{である。}$$

(b) この試行を 3 回行うとき, A と 3 回手をつなぐ人が 2 人いる確率は

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{シ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{スセ} \\ \hline \end{array}} \text{である。}$$

(c) この試行を 3 回行うとき, A と 3 回手をつなぐ人が 1 人だけいる確率は

$$\text{は } \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ソ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{タ} \\ \hline \end{array}} \text{である。}$$

(このページは計算や下書きに利用してよい。)

- (4) i を虚数単位とし, $\alpha = 3 + 4i$ とおく。複素数平面上の原点 O と点 $A(\alpha)$ を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が L 上を動くとき, $w = \frac{25}{z}$ で定まる点 w の描く図形は, 円から 1 点を除いた曲線であり, その円の中心は $\boxed{\text{チ}} - \boxed{\text{ツ}}i$, 半径は $\boxed{\text{テ}}$ である。

直線 L 上の点 $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を, $\angle OBA = \angle OCA = \frac{\pi}{2}$ となるようにとる。ただし, β の実部は γ の実部より大きいとする。このとき

$$\beta = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} + \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}i, \quad \gamma = -\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} + \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}i$$

である。

点 z が線分 BC 上を動くとき, $w = \frac{25}{z}$ で定まる点 w の描く弧の長さは $\boxed{\text{フ}}\pi$ である。

(このページは計算や下書きに利用してよい。)

〔 II 〕 次の あ から く にあてはまる式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。途中経過を記入する必要はない。

c を実数の定数とし、

$$a_1 = 0, \quad a_{2n} = a_n + c, \quad a_{2n+1} = a_n + 1 - c \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ を考え、この数列を次のように 1 個, 2 個, 4 個, 8 個, $\dots$ の項からなる群に分ける。

$$a_1 \mid a_2, a_3 \mid a_4, a_5, a_6, a_7 \mid a_8, \dots, a_{15} \mid a_{16}, \dots$$

すなわち, $k = 1, 2, 3, \dots$ に対し, 第 k 群は 2^{k-1} 個の項からなる。たとえば, 第 3 群の左端は a_4 , 右端は a_7 であり, 4 個の項からなる。

(1) $a_8, a_{15}, a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{35}$ を求めると

$$a_8 = \text{ あ }, \quad a_{15} = \text{ い }, \quad a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{35} = \text{ う }$$

のように c の式で表すことができる。

(2) a_n が第 k 群の右端であるとき, n を k の式で表すと $n = \text{ え }$ であり, a_n を k と c の式で表すと $a_n = \text{ お }$ である。

(3) 第 k 群に含まれるすべての項の和を T_k とする。 $T_{k+1} - 2T_k$ を k の式で表すと $T_{k+1} - 2T_k = \text{ か }$ である。さらに数列 $\left\{ \frac{T_k}{2^k} \right\}$ を考えることにより, 数列 $\{T_k\}$ の一般項を求めると, $T_k = \text{ き }$ となる。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 k 群の右端までのすべての項の和を S_k とする。数列 $\{S_k\}$ の一般項は $S_k = \text{ く }$ である。

(このページは計算や下書きに利用してよい。)

〔 III 〕 以下の問に答えよ。解答は最終結果だけでなく、途中経過も記述せよ。

関数 $f(x) = \log \frac{x^2 + 1}{2}$, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$ を考え、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C 、曲線 $y = g(x)$ を D とする。ただし、 $\log x$ は x の自然対数である。

- (1) 関数 $f(x)$ が極値をとるときの x の値と極値を求めよ。また、その極値が極大値であるか極小値であるかを答えよ。
- (2) 曲線 C の変曲点の座標を求めよ。
- (3) 関数 $h(x) = g(x) - f(x)$ を最小にする x の値、および $h(x)$ の最小値を求めよ。
- (4) 曲線 C と曲線 D で囲まれた図形の面積を求めよ。

(このページは計算や下書きに利用してよい。)

