

2020 年度 明治大学

【総合数理学部】

解答時間 120分

配点 200点

ま

数 学 問 題

注意事項

1. この問題冊子は 14 ページあります。解答用紙には、「数学①」と「数学②」の 2 枚あり、「数学②」には表と裏があります。
2. あなたの受験番号は、2 枚の解答用紙に印刷されています。印刷されている受験番号と、受験票の番号が一致していることを確認下さい。
3. 監督者の指示にしたがい、2 枚の解答用紙の所定の欄に氏名を記入下さい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は、解答用紙「数学①」の所定の欄にマーク下さい。
5. 問題〔Ⅱ〕,〔Ⅲ〕の解答は、解答用紙「数学①」の所定の欄に記入下さい。
6. 問題〔Ⅳ〕,〔Ⅴ〕は、解答用紙「数学②」の所定の欄に解答下さい。
7. 1 問につき 2 つ以上マークしないこと。2 つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
8. 解答は、必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入下さい。
9. 訂正する場合は、消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は、絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また、所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らず、必ず提出下さい。
12. この問題冊子は必ず持ち帰り下さい。
13. 試験時間は 120 分です。
14. マークシート記入例

良い例	悪い例
	

〔 I 〕 次の空欄

ア

 から

カ

 にあてはまる 0 から 9 までの数字を、解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし、

オカ

 は 2 桁の数である。

- (1) 三角形 ABC の内心を I, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおく。AB = 2, BC = 3, CA = 4 とするとき

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ア} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{イ} \\ \hline \end{array}} \vec{b} + \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ウ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{エ} \\ \hline \end{array}} \vec{c}$$

である。

なお、分数は既約分数にすること。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

- (2) サイコロを1回投げる試行において起こりうる事象を考える。事象 X の確率を $P(X)$ で表す。2つの事象 A, B が $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ を満たすとき、事象 A, B は独立であるという。たとえば奇数の目が出る事象を A , 4以下の目が出る事象を B とするとき

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

であるので、事象 A, B は独立である。

3以下の目が出る事象を C とするとき、事象 C, D が独立となるような事象 D (空事象を除く) の個数は オカ である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅱ〕 空欄 から にあてはまる数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) x についての方程式

$$kx^3 - x^2 + 4k = 0$$

の実数解の個数が 1 であるような実数 k の値の範囲は である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

- (2) $\alpha = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$ とする。ただし、 i は虚数単位である。複素数平面上の 3 点 $0, \alpha, \beta$ が正三角形の頂点となるような β は 2 つ存在する。それらは と である。ただし、, の解答の順序は問わない。解答は三角関数を用いずに表せ。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅲ〕 次の空欄 から に当てはまる数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。ただし、解答は三角関数を用いずに表せ。

(1) $\cos \frac{\pi}{8} =$ である。

(2) $\sin \frac{\pi}{16} =$ である。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。例えば

$$a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad a_4 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

となる。

このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sqrt{2 - a_n} =$$

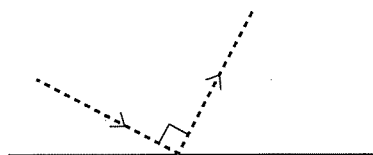
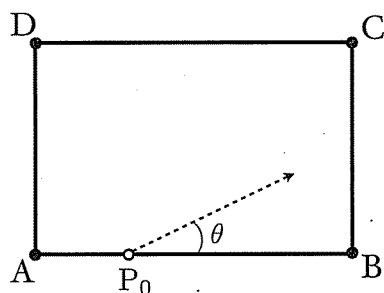
である。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

〔Ⅳ〕 長方形 ABCD の辺 AB 上にある点 P_0 から出発した動点 Q は、この長方形の内部をまっすぐ進み、いずれかの辺上の点 P_1 に到達する。その後、 $k = 1, 2, 3, \dots$ の順に以下を繰り返す。

点 P_k が長方形 ABCD の頂点であれば動点 Q はそこで停止し、点 P_k が長方形 ABCD の頂点でなければ動点 Q は進行方向を 90° 変えて、また長方形 ABCD の内部をまっすぐ進み、いずれかの辺上の点 P_{k+1} に到達する。

$AB = a$, $BC = b$, $\angle BP_0P_1 = \theta$, $AP_0 = \ell$ として、 θ と ℓ は $0 < \theta < 90^\circ$, $0 < \ell < a$ を満たすとする。このとき以下の問いに答えよ。ただし、辺は両端の点を含み、長方形の内部は辺を含むとする。



動点 Q が辺 (頂点を除く) に到達すると進行方向を 90° 変える

- (1) 点 P_1 が辺 BC 上にあるための必要十分条件を a, b, θ, ℓ で表せ。途中経過を記述する必要はない。
- (2) 動点 Q が点 P_0 を出発した後、辺 BC 上の点 P_1 に到達し、次に辺 CD 上の点 P_2 に到達し、次に辺 DA 上の点 P_3 に到達し、次に辺 AB 上の点 P_0 に戻るならば

$$\{b - (a - \ell) \tan \theta\} \tan \theta = \ell \quad \dots\dots ①$$

が成り立つことを示せ。

- (3) $a < b$ ならば、すべての ℓ に対して、条件 ① と (1) の条件を満たすような θ が存在することを示せ。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

[V] (1) 実数 r と自然数 n について和 $\sum_{k=0}^n r^k$ を求めよ。途中経過を記述する必要はない。

(2) 自然数 k に対して $\int_0^1 (-x)^{k-1} dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

を示せ。

(4) 自然数 n に対して $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ と定めるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(このページは、計算や下書きに利用してもよい。)

