

【Ⅰ】

〔解答〕

	最大	最小
(1)	㉔	㉑
(2)	㉑	㉔
(3)	㉑	㉒
(4)	㉒	㉑
(5)	㉔	㉒

〔解説〕

(1)

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta=\frac{2}{3}$$

であり、 $90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき、 $0^\circ<180^\circ-\theta<90^\circ$ であるから

$$\cos(180^\circ-\theta)=\sqrt{1-\sin^2(180^\circ-\theta)}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

となる。 $2<\sqrt{5}$ より $\frac{2}{3}<\frac{\sqrt{5}}{3}$ 、 $5<6$ より $\frac{\sqrt{5}}{3}<\frac{2}{\sqrt{5}}$ であるから、

$$\sin(180^\circ-\theta)<\cos(180^\circ-\theta)<\tan(180^\circ-\theta)$$

となり、最大のものは $\tan(180^\circ-\theta)$ 、最小のものは $\sin(180^\circ-\theta)$ である。

(2)

$x^3+ax^2+bx+c-(-1)$ は、 $x-1, x+1, x+2$ を因数に持つ。3次式であることからこれ以外には因数を持たず、3次の係数が1であることから、

$$\begin{aligned}x^3+ax^2+bx+c+1&=(x-1)(x+1)(x+2)\\&=x^3+2x^2-x-2\end{aligned}$$

となる。これより、 $a=2, b=-1, c=-3$ となり、最大のものは a 、最小のものは c である。

(3)

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sin 30^\circ)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$$

$$\log_2(\cos 45^\circ)=\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$\log_3(\tan 60^\circ)=\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$$

であるから、最大のものは $\log_{\frac{1}{2}}(\sin 30^\circ)$ 、最小のものは $\log_2(\cos 45^\circ)$ である。

(4)

4つの命題を順に[1], [2], [3], [4]とする。

[1] $x^2+y^2=0$ ならば $x=y$

$x^2+y^2=0$ のとき、 $x=y=0$ となるから、命題は真である。この命題の逆は偽であり、反例は $x=y=1$ である。

[2] $x^2-y^2=0$ ならば $x=y$

命題は偽であり、反例は $x=1, y=-1$ である。 $x=y$ のとき、 $x^2-y^2=0$ であるから、この命題の逆は真である。

[3] $(x+y)^2=0$ ならば $x=y$

命題は偽であり、反例は $x=1, y=-1$ である。この命題の逆も偽であり、反例は $x=y=1$ である。

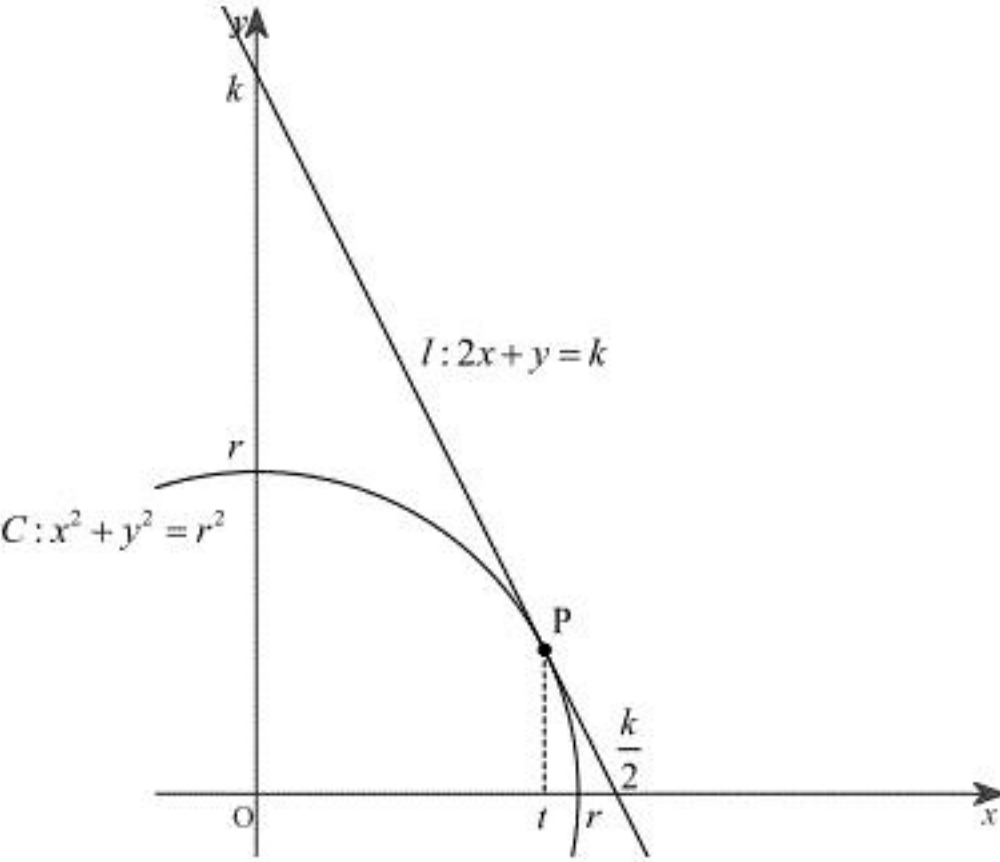
[4] $(x-y)^2=0$ ならば $x=y$

$(x-y)^2=0\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$ であるから、命題とこの命題の逆はどちらも真である。

命題とその対偶の真偽は一致するから、「その命題が真であり、かつその命題の対偶が偽である命題の数」は0である。「その命題が真であり、かつその命題の対偶も真である命題の数」は、[1]と[4]の2つ、「その命題が偽であり、かつその命題の逆が真である命題の数」は、[2]の1つであるから、最大のものは「その命題が真であり、かつその命題の対偶も真である命題の数」、最小のものは「その命題が真であり、かつその命題の対偶が偽である命題の数」である。

(5)

問題文の状況を図示すると下図のようになる。



上図より、

$$t < r < \frac{k}{2} < k \quad (\because k > 0)$$

であるから、最大のものは k 、最小のものは t である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	
	2	2	9	4	6	
(2)	カ	キ				
	3	2				
(3)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
	1	9	2	8	7	5

〔解説〕

(1)

一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= -85 + 4(n-1) \\ &= -89 + 4n \end{aligned}$$

である。 $n=1, 2, \dots, 22$ のとき $a_n < 0$ 、 $n=23, 24, \dots$ のとき $a_n > 0$ となるから、初項から第 n 項までの和 S_n は $n=22$ のとき最小となり、そのときの値は

$$\begin{aligned} S_{22} &= \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot (a_1 + a_{22}) \\ &= 11 \cdot (-85 - 1) \\ &= -946 \end{aligned}$$

をとる。

(2)

$\triangle OAB$ の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 \cdot |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2^2 \cdot (\sqrt{7})^2 - 5^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。

(3)

集団 A、集団 B を合わせた集団の平均は

$$\frac{30 \cdot 24 + 50 \cdot 16}{30 + 50} = 19$$

である。

$$(\text{分散}) = (2 \text{ 乗の平均}) - (\text{平均の} 2 \text{ 乗})$$

であるから、集団 A の 2 乗の平均は

$$24^2 + 10 = 586$$

となり、集団 B の 2 乗の平均は

$$16^2 + 16 = 272$$

となる。よって、集団 A、集団 B を合わせた集団の 2 乗の平均は、

$$\frac{30 \cdot 586 + 50 \cdot 272}{30 + 50} = 389.75$$

となるから、集団 A、集団 B を合わせた集団の分散は

$$389.75 - 19^2 = 28.75$$

である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1) $b = -5a^2$

(2)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

である。 $x = b$ でも極値をとるから、

$$f'(b) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3b^2 + 2ab + b = 0$$

$$\Leftrightarrow b(3b + 2a + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -5a^2(-15a^2 + 2a + 1) = 0 \quad (\because b = -5a^2)$$

$$\Leftrightarrow -5a^2(5a + 1)(-3a + 1) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{5}, \frac{1}{3} \quad (\because a \neq 0)$$

となる。ここで、 $a = -\frac{1}{5}$ とすると、 $b = -5a^2 = -\frac{1}{5}$ となり、 $a \neq b$ を満たさない。したがって、

$a = \frac{1}{3}$ であり、 $b = -5a^2 = -\frac{5}{9}$ である。このとき、 $f(x) = 0$ は異なる2実数解を持ち、確かに3

次関数 $f(x)$ は極値を持ち十分である。

(答) $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{5}{9}$

(3)

$b < a$ より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	b	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

極小値が0となるから、

$$f(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + a \cdot a^2 - 5a^2 \cdot a + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 3a^3$$

より、 $c = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$ である。

(答) $c = \frac{1}{9}$

〔解説〕

(1)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

である。 $x = a$ で極値をとるから、

$$f'(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 2a \cdot a + b = 0$$

$$\therefore b = -5a^2$$

となる。

[IV]

(1)

背理法で証明する。すなわち、 n が p で割り切れると仮定して矛盾を導く。 $2n+1$ も p で割り切れるから、整数 a, b を用いて

$$\begin{cases} n=ap & \cdots \textcircled{1} \\ 2n+1=bp & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

と表すことができる。このとき、 $\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}$ は、

$$1=(b-2a)p$$

となる。 $b-2a$ は整数、 p は自然数であるから、 $(b-2a, p)=(1, 1)$ となるが、これは p が2より大きな自然数であることに矛盾する。したがって、 $2n+1$ が p で割り切れるとき、 n は p で割り切れないことが示された。

(証明終)

(2)

(1)は、 $p=2$ としても成立している。 $2n+1$ の任意の素因数を p とすると、 n は p で割り切れないから、 $2n+1$ と n をともに割り切る素数は存在しない。ゆえに、 n と $2n+1$ は互いに素である。

(証明終)

(3)

n^3+8n が $2n+1$ で割り切れるとき、ある整数 c を用いて、

$$\begin{aligned} n^3+8n &= c(2n+1) \\ \Leftrightarrow n(n^2+8) &= c(2n+1) \end{aligned}$$

と表すことができる。(2)より、 n と $2n+1$ は互いに素であるから、 n^2+8 は $2n+1$ の倍数である。また、 $4(n^2+8)$ が $2n+1$ で割り切れる、つまり、ある整数 d を用いて、

$$4(n^2+8)=d(2n+1)$$

と表されるとき。このとき、 $2n+1$ は奇数であることより、4と $2n+1$ は互いに素であるから、 n^2+8 は $2n+1$ の倍数である。以上より、 n^3+8n が $2n+1$ で割り切れることと、 $4(n^2+8)$ が $2n+1$ で割り切れることは同値である。さらに、

$$4(n^2+8)=(2n+1)(2n-1)+33$$

より、33が $2n+1$ で割り切れることと同値である。 n は2より大きな自然数であるから、 $2n+1$ は7以上の奇数となる。33の約数のうち、7以上の奇数であるものは、11と33であるから、 n^3+8n が $2n+1$ で割り切れるときの n の値は、

$$2n+1=11, 33 \Leftrightarrow n=5, 16$$

である。

(答) $n=5, 16$

〔V〕

〔解答〕

(1) $\frac{1}{6}$

(2)

$15=3\times 5$ より、15 で割り切れるのは、「5 で割り切れる」かつ「3 で割り切れる」ときである。5 で割り切れるのは、1 回目に 5 が書かれたカードを取り出すときである。3 で割り切れるのは 4 枚のカードに書かれた数字の和が 3 の倍数のときである。4 枚の中に 5 が含まれ、和が 3 の倍数となる選び方は、 $(5, 1, 2, 4), (5, 1, 3, 6), (5, 3, 4, 6)$ である。1 回目に 5 を取り出す確率は $\frac{1}{6}$ である。2, 3, 4 回目の取り出し方の組み合わせは ${}_5C_3=10$ (通り) であり、これらは同様に確からしい。したがって、4 枚のカードを取り出してできた 4 ケタの自然数が 15 で割り切れる確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{20}$$

である。

(答) $\frac{1}{20}$

(3)

できた自然数が 3 の倍数となるのは、カードに書かれた数字の和が 3 の倍数のときである。偶数が書かれたカードを取り出すまでに引いたカードに書かれた数字の和を 3 で割ったときの余りを k ($k=0, 1, 2$) とする。

[1] $k=0$ のとき

6 を取り出すと 3 の倍数となって終了し、2, 4 を取り出すと 3 の倍数とならずに終了する。

[2] $k=1$ のとき

2 を取り出すと 3 の倍数となって終了し、4, 6 を取り出すと 3 の倍数とならずに終了する。

[3] $k=2$ のとき

4 を取り出すと 3 の倍数となって終了し、2, 6 を取り出すと 3 の倍数とならずに終了する。

[1], [2], [3] のいずれにおいても、 $\frac{1}{3}$ の確率で 3 の倍数となって終了するから、できた自然数が

3 の倍数になる確率は $\frac{1}{3}$ である。

(答) $\frac{1}{3}$

(4)

取り出されずに残ったカードに書かれた数字を m ($m=1, 2, 3, 4, 5, 6$) とする。

[1] $m=1$ のとき

5 ケタの自然数はすべて 1 で割り切れる。

[2] $m=2$ のとき

2 で割り切れるのは一の位が偶数のときである。1 回目に取り出すのは、1, 3, 4, 5, 6 の 5 通りのうち、4, 6 であるから、確率は $\frac{2}{5}$ である。

[3] $m=3$ のとき

3 で割り切れるのは各位の数の和が 3 の倍数のときである。 $1+2+4+5+6=18$ であるから、5 ケタの自然数はすべて 3 で割り切れる。

[4] $m=4$ のとき

4 で割り切れるのは下 2 ケタが 4 の倍数のときである。1 回目に取り出すのは、1, 2, 3, 5, 6 の 5 通りのうち、2, 6 であり、2 回目に取り出すのは、残りの 4 通りのうち、1, 3, 5 であるから、確率は $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ である。

[5] $m=5$ のとき

5 で割り切れるのは一の位が 5 または 0 のときであるが、このようなことは起こらないため、確率は 0 である。

[6] $m=6$ のとき

$6=2\times 3$ より、6 で割り切れるのは、一の位が偶数かつ各位の数の和が 3 の倍数のときである。 $1+2+3+4+5=15$ であるから、5 ケタの自然数はすべて 3 で割り切れる。1 回目に取り出すのは、1, 2, 3, 4, 5 の 5 通りのうち、2, 4 であるから、確率は $\frac{2}{5}$ である。

以上 [1] から [6] より、取り出されずに残ったカードに書かれた数字を m である確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ となるので、求める確率は

$$\frac{1}{6} \left(1 + \frac{2}{5} + 1 + \frac{3}{10} + 0 + \frac{2}{5} \right) = \frac{31}{60}$$

である。

(答) $\frac{31}{60}$

〔解説〕

(1)

対称性より、3 回目に 1, 2, 3, 4, 5, 6 が書かれたカードを取り出す確率はすべて等しく $\frac{1}{6}$ である。