

【I】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ		
	1	5	5	1	4	9	5		
(2)	ク	ケ	コ	サ	シ				
	2	0	1	7	6				
(3)	ス	セ	ソ	タ					
	1	2	2	0					

【解説】

(1)
 k を自然数として $a+b=3k$ とおく。このとき、条件より $2 \leq a+b \leq 30$ が成立するので $1 \leq k \leq 10$ である。 k を固定すると $a+b=3k$ を満たす a, b の組は $(a, b) = (1, 3k-1), (2, 3k-2), \dots, (3k-1, 1)$ の $3k-1$ 通りある。 $1 \leq k \leq 10$ の範囲で和を取ると
$$\sum_{k=1}^{10} (3k-1) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 - 10 = 155$$
 となるので、 $a+b$ が 30 以下の 3 の倍数となる a, b の組合せは全部で 155 通りある。
ここで、 l を自然数として $a+b+c=3l$ とおく。このとき、条件より $3 \leq a+b+c \leq 30$ が成立するので $1 \leq l \leq 10$ である。ここで、 c, l を固定して考えると、 $a+b=3l-c$ を満たす a, b の組は $(a, b) = (1, 3l-c-1), (2, 3l-c-2), \dots, (3l-c-1, 1)$ の $3l-c-1$ 通りある。このとき、 c の取りうる値の範囲は $1 \leq c \leq 3l-2$ であるので、この範囲で和を取ると
$$\begin{aligned} \sum_{c=1}^{3l-2} (3l-c-1) &= -\frac{1}{2} (3l-2)(3l-1) + (3l-1)(3l-2) \\ &= \frac{1}{2} (3l-1)(3l-2) \\ &= \frac{9}{2} l^2 - \frac{9}{2} l + 1 \end{aligned}$$
 となる。さらに、 $1 \leq l \leq 10$ であるから、この範囲で和を取ると
$$\sum_{l=1}^{10} \left(\frac{9}{2} l^2 - \frac{9}{2} l + 1 \right) = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 + 10 = 1495$$
 となる。したがって、 $a+b+c$ が 30 以下の 3 の倍数となる a, b, c の組合せは全部で 1495 通りある。

(2)
まず、
$$\begin{aligned} \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8 &= \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7} \\ &= \log_2 8 \\ &= 3 \end{aligned}$$
 であるから与式は
$$\begin{aligned} \log_2 (ab+bc+cd+da) &= 6 \\ \Leftrightarrow ab+bc+cd+da &= 2^6 \\ \Leftrightarrow (a+c)(b+d) &= 2^6 \end{aligned}$$
 と表される。ここで、 a, b, c, d が自然数であることより $a+c \geq 2, b+d \geq 2$ であるから、 $(a+c)(b+d) = 2^6$ を満たす $a+c, b+d$ の組は $(a+c, b+d) = (2^1, 2^5), (2^2, 2^4), (2^3, 2^3), (2^4, 2^2), (2^5, 2^1)$ の 5 通りある。
[1] $(a+c, b+d) = (2^1, 2^5)$ のとき $a+c = 2^1$ を満たす a, c の組は $2^1 - 1 = 1$ (通り)
あり、 $b+d = 2^5$ を満たす b, d の組は $2^5 - 1 = 31$ (通り)
あるので、条件を満たす a, b, c, d の組は $1 \cdot 31 = 31$ (通り)
ある。
[2] $(a+c, b+d) = (2^2, 2^4)$ のとき $a+c = 2^2$ を満たす a, c の組は $2^2 - 1 = 3$ (通り)
あり、 $b+d = 2^4$ を満たす b, d の組は $2^4 - 1 = 15$ (通り)
あるので、条件を満たす a, b, c, d の組は $3 \cdot 15 = 45$ (通り)
ある。
[3] $(a+c, b+d) = (2^3, 2^3)$ のとき $a+c = 2^3$ を満たす a, c の組は $2^3 - 1 = 7$ (通り)
あり、 $b+d = 2^3$ を満たす b, d の組も $2^3 - 1 = 7$ (通り)
あるので、条件を満たす a, b, c, d の組は $7 \cdot 7 = 49$ (通り)
ある。
[4] $(a+c, b+d) = (2^4, 2^2)$ のとき [2]と同様に考えて、条件を満たす a, b, c, d の組は 45 通り
ある。
[5] $(a+c, b+d) = (2^5, 2^1)$ のとき [1]と同様に考えて、条件を満たす a, b, c, d の組は 31 通り
ある。
以上[1], [2], [3], [4], [5]より与式を満たす a, b, c, d の組合せは全部で $31+45+49+45+31 = 201$ (通り)
ある。また、それらの組合せのうち、 $a+c < b+d$ を満たす a, b, c, d の組合せは[1], [2]より全部で $31+45 = 76$ (通り)
ある。

(3)
与式を変形すると $|a-b| \leq \frac{b^2}{16}$
$$\Leftrightarrow b - \frac{b^2}{16} \leq a \leq b + \frac{b^2}{16} \quad \cdots \cdots \text{①}$$
 となる。また、 a は正の整数であるから、①かつ $0 < a$ が条件である。 $0 < a$ であることに注意して場合分けをする。
[1] $0 < b - \frac{b^2}{16} \Leftrightarrow 0 < b < 16$ のとき $\frac{b^2}{16}$ の整数部分を k とする。 b が整数であるから、①を満たす整数 a の個数は $b-k, \dots, b, \dots, b+k$ の $2k+1$ 個である。
[2] $b - \frac{b^2}{16} \leq 0 \Leftrightarrow 16 \leq b$ のとき [1]と同様にして、 b が整数であるから、①を満たす整数 a の個数は $1, 2, \dots, b+k$ の $b+k$ 個である。
ここで、①を満たす整数 a の個数は、 $b=15$ のとき
$$\frac{15^2}{16} = 14 + \frac{1}{16}$$
 より 29 個であり、 $b=16$ のとき 32 個である。したがって、 b が大きくなるほど①を満たす整数 a の個数は増加する。①を満たす整数 a の個数が 19 個となるときは[1]の場合であり、このとき $2k+1 = 19 \Leftrightarrow k = 9$
より、 $9 \leq \frac{b^2}{16} < 10$ であるから $144 \leq b^2 < 160$
となり、これを満たす正の整数 b は $b=12$ である。また、①を満たす整数 a の個数が 45 個となるときは[2]の場合であり、このとき $45 \leq b + \frac{b^2}{16} < 46 \Leftrightarrow 784 \leq (b+8)^2 < 800$
となり、これを満たす正の整数 b は $b=20$ である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

(1)	あ	い	う	え	お	か	き	く	け
	3	2	1	4	9	2	6	1	0
(2)	こ	さ	し	す	せ	そ			
	2	1	4	2	1	0			
(3)	た	ち	つ						
	2	7	4						

〔解説〕

(1)

まず、 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が 2 点 $(-1, 8), (3, 20)$ を通るので、

$$\begin{cases} 8 = -1 + a - b + c \\ 20 = 27 + 9a + 3b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 9 \\ 9a + 3b + c = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 4 \\ c = -3a + 5 \end{cases}$$

が成立する。ここで、曲線 G の方程式は

$$y = (x-2)^3 + a(x-2)^2 + b(x-2) + c$$

$$\Leftrightarrow y = x^3 + (a-6)x^2 + (-4a+b+12)x + (4a-2b+c-8)$$

である。曲線 F の方程式と連立して y を消去すると

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + (a-6)x^2 + (-4a+b+12)x + (4a-2b+c-8)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + (2a-6)x + (-2a+b+4) = 0 \quad \cdots \text{①}$$

となる。曲線 F と曲線 G は接するので、2 次方程式①は重解を持ち、判別式を D とすると $D=0$ が成立する。よって

$$\frac{D}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-3)^2 - 3 \cdot (-2a+b+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 6a + 9 = 0 \quad (\because b = -2a - 4)$$

$$\Leftrightarrow (a+3)^2 = 0$$

となるから、 $a = -3$ を得る。さらに $b = -2a - 4, c = -3a + 5$ に $a = -3$ を代入すると $b = 2, c = 14$ を得る。これらの値を曲線 G の方程式に代入すると曲線 G の方程式は

$$y = x^3 - 9x^2 + 26x - 10$$

となる。

(2)

①に a, b, c の値を代入すると

$$3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2)^2 = 0$$

となるから、接点の x 座標は $x = 2$ である。また、曲線 G の方程式に $x = 2$ を代入すると $y = 14$ を得るから、接点の座標は

$$(x, y) = (2, 14)$$

である。 $y = x^3 - 9x^2 + 26x - 10$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 18x + 26$$

となり、ここに $x = 2$ を代入すると

$$y' = 2$$

となるから、両曲線に接する直線の方程式は

$$y = 2(x-2) + 14$$

$$\Leftrightarrow y = 2x + 10$$

である。

(3)

$y = x^3 - 9x^2 + 26x - 10$ と $y = 2x + 10$ から y を消去すると

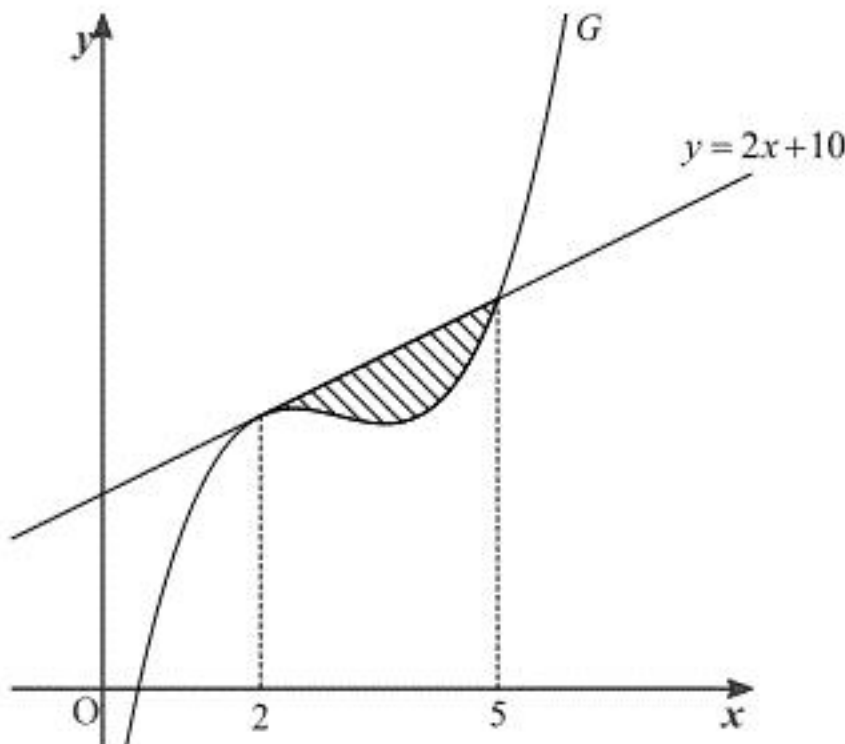
$$x^3 - 9x^2 + 26x - 10 = 2x + 10$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 2, 5$$

となる。したがって $y = 2x + 10$ と曲線 G の共有点の x 座標は $x = 2, 5$ であり、 $y = 2x + 10$ と曲線 G により囲まれた領域は下図の斜線部のようになる。



したがって、求める面積を S とおくと

$$S = \int_2^5 \left\{ (2x+10) - (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) \right\} dx$$

$$= \int_2^5 -(x-2)^2(x-5) dx$$

$$= \int_2^5 -(x-2)^2(x-2-3) dx$$

$$= \int_2^5 \left\{ -(x-2)^3 + 3(x-2)^2 \right\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}(x-2)^3 + (x-2)^2 \right]_2^5$$

$$= \frac{27}{4}$$

である。