

【Ⅰ】

【解答】

(1)	①	ア	イ						
		1	5						
	②	ウ	エ						
(2)	①	ア	イ						
		1	6						
	②	ウ	エ	オ	カ				
(3)	①	ア	イ						
		1	1						
	②	ウ	エ	オ					
(4)	①	ア	イ						
		1	1	5	6	0			
	②	ウ	エ	オ					
(5)	①	ア	イ						
		1	1						
	②	ウ	エ	オ					
(6)	①	ア	イ	ウ	エ	オ			
		1	1	5	6	0			
	②	ウ	エ	オ					

【解説】

(1)①

1, 2, 3, 4, 5, 6から異なる4つの数を選び、小さい順に a_1, a_2, a_3, a_4 とすることで、 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ となる。したがって、求める場合の数は、1, 2, 3, 4, 5, 6から異なる4つの数を選ぶ場合の数であるから、

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \text{ (通り)}$$

である。

②

$a_1 \leq a_2 < a_3 < a_4$ となるとき、 $a_1 - 1 < a_2 < a_3 < a_4 + 1$ が成り立つ。これは、①と同様に考えて、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6から異なる4つの数を選び、小さい順に $a_1 - 1, a_2, a_3, a_4 + 1$ とすればよい。従って、求める場合の数は、

$${}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{ (通り)}$$

である。

③

$a_1 \leq a_2 < a_3 \leq a_4$ となるとき、 $a_1 - 1 < a_2 < a_3 < a_4 + 1$ が成り立つ。これは、①と同様に考えて、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7から異なる4つの数を選び、小さい順に $a_1 - 1, a_2, a_3, a_4 + 1$ とすればよい。従って、求める場合の数は、

$${}_8C_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \text{ (通り)}$$

である。

(2)①

$y = 0$ のとき、 $x \geq 0, z \geq 0$ かつ $x + z = \pi$ であるから、 $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq z \leq \pi$ である。また、

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \sin z \\ \cos x + \sin y = \sqrt{3} \sin z \end{cases}$$

に $y = 0, z = \pi - x$ を代入すると、

$$\begin{cases} \sin x \cdot 1 = \sin(\pi - x) \\ \cos x + 0 = \sqrt{3} \sin(\pi - x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sin(\pi - x) \\ \cos x = \sqrt{3} \sin x \end{cases}$$

となる。このとき、全ての実数 x に対して $\sin x = \sin(\pi - x)$ は成り立つ。ここで、 $\cos x = 0$ のとき、 $\cos x = \sqrt{3} \sin x$ は成立しないから、不適である。ゆえに、 $\cos x \neq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \cos x &= \sqrt{3} \sin x \\ \Leftrightarrow \tan x &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \therefore x &= \frac{1}{6} \pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi) \end{aligned}$$

となる。

②

$y > 0$ のとき、 $x \geq 0, z \geq 0$ かつ $x + y + z = \pi$ であるから、 $0 \leq x < \pi, 0 < y \leq \pi, 0 \leq z < \pi$ である。このもとで、

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \sin z \\ \cos x + \sin y = \sqrt{3} \sin z \end{cases}$$

に $z = \pi - x - y$ を代入すると、

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \sin(\pi - x - y) \\ \cos x + \sin y = \sqrt{3} \sin(\pi - x - y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cos y = \sin(x + y) \\ \cos x + \sin y = \sqrt{3} \sin(x + y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \sin y = 0 \\ \cos x + \sin y = \sqrt{3} \sin(x + y) \end{cases} \quad (\because \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y)$$

である。 $0 \leq x < \pi, 0 < y \leq \pi, 0 \leq z < \pi$ より、

$$\cos x \sin y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pi, \text{ または、 } y = \pi$$

となる。

[1] $x = \frac{1}{2} \pi$ のとき

$$\cos x + \sin y = \sqrt{3} \sin(x + y) \text{ より、}$$

$$\sin y = \sqrt{3} \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sin y = \sqrt{3} \cos y$$

となる。 $\cos y = 0$ のとき、 $\sin y = \sqrt{3} \cos y$ は成立しないから、不適である。ゆえに、 $\cos y \neq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin y &= \sqrt{3} \cos y \\ \Leftrightarrow \tan y &= \sqrt{3} \\ \therefore y &= \frac{1}{3} \pi \quad (\because 0 < y \leq \pi) \end{aligned}$$

となる。

[2] $y = \pi$ のとき

$$x + y + z = \pi \text{ であるから、 } x = z = 0 \text{ となる。しかし、これは } \cos x + \sin y = \sqrt{3} \sin(x + y) \text{ を満たさず不適である。}$$

以上、[1], [2]より、 $y > 0$ のとき、 $x = \frac{1}{2} \pi, y = \frac{1}{3} \pi$ である。

(3)①

$$\overline{AB} = (b, 0, -1), \overline{AC} = (0, c, -1) \text{ より、}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = b \cdot 0 + 0 \cdot c + 1 \cdot 1 = 1$$

である。

②

$$\angle BAC = \frac{1}{3} \pi \text{ より、}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} |\overline{AB}| |\overline{AC}| = 1$$

$$\Leftrightarrow |\overline{AB}| |\overline{AC}| = 2$$

である。ゆえに、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。

③

$$|\overline{AB}| |\overline{AC}| = 2 \text{ より、 } |\overline{AB}| \geq 0, |\overline{AC}| \geq 0 \text{ であるから、}$$

$$|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 = 4 \Leftrightarrow (b^2 + 1)(c^2 + 1) = 4$$

である。 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を代入して、

$$\left(\frac{3}{4} + 1\right)(c^2 + 1) = 4$$

$$\Leftrightarrow c^2 + 1 = \frac{16}{7}$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{9}{7}$$

$$\therefore c = \frac{3\sqrt{7}}{7} \quad (\because c > 0)$$

となる。

④

$$|\overline{BC}|^2 = b^2 + c^2 \text{ より、}$$

$$(b^2 + 1)(c^2 + 1) = 4$$

$$\Leftrightarrow c^2 + 1 = \frac{4}{b^2 + 1} \quad (\because b^2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{4}{b^2 + 1} - 1$$

である。ここで、 $c > 0$ より

$$\frac{4}{b^2 + 1} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{b^2 + 1} > 1$$

$$\Leftrightarrow 4 > b^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow b^2 < 3$$

$$\therefore 0 < b < \sqrt{3}$$

である。 $|\overline{BC}|^2$ について、 $c^2 = \frac{4}{b^2 + 1} - 1$ を代入して、

$$|\overline{BC}|^2 = b^2 + \frac{4}{b^2 + 1} - 1$$

$$= (b^2 + 1) + \frac{4}{b^2 + 1} - 2$$

となる。ゆえに、 $b^2 + 1 > 0$ より、相加平均・相乗平均の関係から、

$$|\overline{BC}|^2 \geq 2 \sqrt{(b^2 + 1) \cdot \frac{4}{b^2 + 1}} - 2$$

$$= 4 - 2$$

$$= 2$$

となる。ただし、等号成立条件は

$$b^2 + 1 = \frac{4}{b^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (b^2 + 1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 1 = 2 \quad (\because b^2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 1$$

$$\therefore b = 1 \quad (\because 0 < b < \sqrt{3})$$

である。また、このとき $c = 1$ である。したがって、 $|\overline{BC}|^2$ は $b = 1, c = 1$ のとき最小値2を取る。

よって、 $|\overline{BC}| \geq 0$ より、 $|\overline{BC}|$ 、すなわち線分BCの長さは $b = 1, c = 1$ のとき最小値 $\sqrt{2}$ を取る。

(4)①

実数 p, q, r を用いて、 $f(x) = px^2 + qx + r$ とする。ただし、 $f(x)$ は2次関数より、 $p \neq 0$ である。このとき、 $\int_a^x f(t) dt + af(x) = 2x^3 + 3x^2 - 31x + 20$ の両辺を x で微分して、

$$f(x) + af'(x) = 6x^2 + 6x - 31$$

$$\Leftrightarrow px^2 + qx + r + a(2px + q) = 6x^2 + 6x - 31$$

$$\Leftrightarrow px^2 + (q + 2ap)x + (r + aq) = 6x^2 + 6x - 31$$

となる。ゆえに、 $px^2 + (q + 2ap)x + (r + aq) = 6x^2 + 6x - 31$ は x についての恒等式であるから、係数と比較して、

$$\begin{cases} p = 6 \\ q + 2ap = 6 \\ r + aq = -31 \end{cases}$$

となる。したがって、 x^2 の係数は6である。

②

$$p = 6 \text{ より、}$$

$$q = 6 - 12a$$

$$r = -31 - aq = -31 - a(6 - 12a) = 12a^2 - 6a - 31$$

であるから、 $\int_a^x f(t) dt + af(x) = 2x^3 + 3x^2 - 31x + 20$ に $x = a$ を代入して、

$$af(a) = 2a^3 + 3a^2 - 31a + 20$$

$$\Leftrightarrow a\{6a^2 + (6 - 12a)a + (12a^2 - 6a - 31)\} = 2a^3 + 3a^2 - 31a + 20$$

$$\Leftrightarrow 6a^3 - 31a = 2a^3 + 3a^2 - 31a + 20$$

$$\Leftrightarrow 4a^3 - 3a^2 - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2)(4a^2 + 5a + 10) = 0$$

となる。 $a > 0$ のとき、 $4a^2 + 5a + 10 > 0$ であるから、 $a = 2$ である。ゆえに、 $(p, q, r) = (6, -18, 5)$ であり、 $f(x)$ は $f(x) = 6x^2 - 18x + 5$ となる。

(5)①

直線Mは直線Lを平行移動した直線であるから、Pを通る傾き1の直線である。また、P, QはH上の点より、実数 $l (> k)$ を用いて $P(k, k^2), Q(l, l^2)$ と表せる。ゆえに、 $k < l$ より、Mの傾きに注目して、

$$\frac{l^2 - k^2}{l - k} = 1$$

$$\Leftrightarrow l + k = 1$$

$$\therefore l = 1 - k$$

となるから、Qのx座標は、 $1 - k$ である。

②

HとLの交点のx座標は、

$$x^2 = x + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = -2, 3$$

であり、Aのx座標はBのx座標より小さいから、Aのx座標は $x = -2$ であり、Bのx座標は $x = 3$ である。したがって、

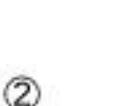
$$(A \text{ の } x \text{ 座標}) < (P \text{ の } x \text{ 座標}) < (Q \text{ の } x \text{ 座標}) < (B \text{ の } x \text{ 座標})$$

であり、この範囲で交点P, Qは必ず存在するから、

$$-2 < k < 1 - k < 3 \Leftrightarrow -2 < k < \frac{1}{2}$$

となる。

③



A(-2, 4), B(3, 9)より、直線L, Mは傾き1の直線であるから、

$$AB = \sqrt{1 + 1} \{3 - (-2)\} = 5\sqrt{2}$$

$$PQ = \sqrt{1 + 1} \{1 - k - k\} = \sqrt{2} (1 - 2k)$$

である。ここで、直線Mの方程式は、

$$y = (x - k) + k^2 \Leftrightarrow y = x + k^2 - k$$

となる。ゆえに、直線Lと直線Mの距離は、傾きがともに1であることから、y軸との交点に注目して、 $\frac{1}{\sqrt{2}} (6 - k^2 + k)$ となる。また四角形ABQPはABとPQが平行であるから、台形である。したがって、四角形ABQPの面積Sは、

$$S = \frac{1}{2} \cdot \{5\sqrt{2} + \sqrt{2} (1 - 2k)\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (6 - k^2 + k)$$

$$= (3 - k)(6 + k - k^2)$$

$$= k^3 - 4k^2 - 3k + 18$$

である。

④

③より、Sをkで微分すると

$$S' = 3k^2 - 8k - 3 = (k - 3)(3k + 1)$$

となり、 $-2 < k < \frac{1}{2}$ の範囲で $S' = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$ である。したがって、 $-2 < k < \frac{1}{2}$ におけるSの増減表は以下の通りである。

k	-2	...	$-\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{2}$
S'		+	0	-	
S					

したがって、 $-2 < k < \frac{1}{2}$ で面積Sを最大にするようなkの値は、 $k = -\frac{1}{3}$ である。

(6)①

$$t = 2^x - 2^{2-x} = 2^x - 4 \cdot 2^{-x} \text{ より、 } t^2 = 4^x - 8 + 16 \cdot 4^{-x} \text{ である。したがって、}$$

$$y = (4^x - 8 + 16 \cdot 4^{-x}) - 15(2^x - 4 \cdot 2^{-x}) + 60$$

$$= t^2 - 15t + 60$$

である。

②

yは、

$$y = t^2 - 15t + 60 = \left(t - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$$

と平方完成できる。このとき、 $t = \frac{15}{2}$ となる実数xの値は、

$$2^x - 4 \cdot 2^{-x} = \frac{15}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 15 \cdot 2^x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (2^x - 8)(2^x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 8 \quad (\because 2^x + 1 > 0)$$

$$\therefore x = 3$$

であるから、yは $x = 3$ のとき、最小値 $\frac{15}{4}$ をとる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

$$\begin{aligned} (1) \quad b_1 &= \frac{3}{4} \\ a_2 &= \frac{9}{16} \\ c_3 &= \frac{37}{64} \\ (2) \quad c_{n+1} &= \frac{3}{4}c_n + \frac{1}{4} \\ (3) \quad c_n &= -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1 \\ (4) \quad n &= 17 \end{aligned}$$

〔解説〕

- (1) 時刻0に動点Pは地点Aにいるから、時刻1に動点Pが地点Bにいる確率は、規則(a)より、

$$b_1 = \frac{3}{4}$$

である。また、時刻2に動点Pが地点Aにいるのは、動点Pが時刻1に地点Bにいるときのみであるから、規則(b)より、

$$a_2 = b_1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

である。さらに、時刻3に動点Pが地点Cにいるような時刻1, 2, 3の動点Pの位置は、移動の仕方は、「動点Pが時刻1, 2, 3に地点Cにいる」、「動点Pが時刻1に地点B、時刻2, 3に地点Cにいる」、または「動点Pが時刻1に地点B、時刻2に動点Pが地点A、時刻3に地点Cにいる」の3通りである。したがって、規則より、

$$c_3 = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 + b_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + a_2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{37}{64}$$

である。

- (2) 時刻 n に動点Pは地点A, B, Cのいずれかの地点に必ず存在するから、

$$a_n + b_n + c_n = 1$$

が成立する。また、時刻 $n+1$ に動点Pが地点Cにいるような移動の仕方は、「動点Pが時刻 n に地点Cに存在し、かつ時刻 $n+1$ にはCにとどまる」、「動点Pが時刻 n に地点Aに存在し、時刻 $n+1$ にはAからCに移る」、または「動点Pが時刻 n に地点Bに存在し、時刻 $n+1$ にはBからCに移る」の3通りである。したがって、規則より、

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n \cdot 1 + a_n \cdot \frac{1}{4} + b_n \cdot \frac{1}{4} \\ &= c_n + \frac{1}{4}(a_n + b_n) \\ &= c_n + \frac{1}{4}(1 - c_n) \\ &= \frac{3}{4}c_n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

- (3)
$$c_{n+1} = \frac{3}{4}c_n + \frac{1}{4} \Leftrightarrow c_{n+1} - 1 = \frac{3}{4}(c_n - 1)$$

より、数列 $\{c_n - 1\}$ は初項 $c_0 - 1 = -1$ 、公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列である。したがって、

$$c_n - 1 = (-1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \Leftrightarrow c_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1$$

である。

- (4) (3)より、

$$\begin{aligned} c_n &\geq 0.99 \\ \Leftrightarrow -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1 &\geq 0.99 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n &\leq 0.01 \end{aligned}$$

である。両辺正より、常用対数を取ると、底 $10 > 1$ に注意して、

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{3}{4}\right)^n &\leq \log_{10}(0.01) \\ \Leftrightarrow n(\log 3 - 2\log 2) &\leq -2 \\ \Leftrightarrow n(0.48 - 2 \cdot 0.30) &\leq -2 \\ \Leftrightarrow -0.12n &\leq -2 \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{1}{0.06} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\frac{1}{0.06} = 16.6\dots$ より、 $n \geq \frac{1}{0.06}$ を満たす最小の整数 n 、すなわち求める

整数 n の値は $n = 17$ である。