

〔I〕

〔解答〕

(1)	1
	E
(2)	2
	G

〔解説〕

(1)

コインを5回投げて、点数の合計が3点となるには、表の面が4回、裏の面が1回出ればよい。
したがって、求める確率は

$${}_5C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$$

である。

(2)

コインを10回投げて、点数の合計が5点以上となる時、次の場合が考えられる。

[1] 点数の合計が6点となる時

表の面が8回、裏の面が2回出ればよいから、この場合の数は

$${}_{10}C_2 = 45 \text{ (通り)}$$

ある。

[2] 点数の合計が8点となる時

表の面が9回、裏の面が1回出ればよいから、この場合の数は

$${}_{10}C_1 = 10 \text{ (通り)}$$

ある。

[3] 点数の合計が10点となる時

表の面が10回出ればよいから、この場合の数は

$${}_{10}C_0 = 1 \text{ (通り)}$$

ある。

以上、[1]、[2]、[3]より、これらの事象は互いに排反であるから、求める場合の数は

$$45 + 10 + 1 = 56 \text{ (通り)}$$

である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

3	4
D	E

〔解説〕

与式は

$$2ab + 4a - 5b = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-5)(b+2) = -10$$

と変形でき、 $2a-5$ が奇数であることを考慮すると、整数 $2a-5$ 、 $b+2$ の組は

$$(2a-5, b+2) = (-1, 10), (-5, 2), (1, -10), (5, -2)$$

の4通り考えられる。したがって、条件を満たす整数 a 、 b の組は

$$(a, b) = (2, 8), (0, 0), (3, -12), (5, -4)$$

の4通りあり、 a の最大値は5である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

5	6	7	101
D	C	B	6

〔解説〕

$\angle APB = 90^\circ$ であるから、点 P は線分 AB を直径とする円周上に存在する。この円の中心は線分 AB の中点であるから、その座標は

$$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2} \right), \text{ すなわち } (4, 3)$$

と求まる。また、半径は線分 AB の長さの半分であるから、

$$\frac{1}{2} \sqrt{(6-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$$

と求まる。以上より、点 P の座標を整数 p, q を用いて (p, q) とおくと、

$$(p-4)^2 + (q-3)^2 = 5$$

が成り立つから、平方数 $(p-4)^2, (q-3)^2$ の組は

$$\left((p-4)^2, (q-3)^2 \right) = (1, 4), (4, 1)$$

の 2 通り考えられる。よって、整数 $p-4, q-3$ の組は

$$(p-4, q-3) = (\pm 1, \pm 2), (\pm 2, \pm 1) \text{ (複合任意)}$$

の 8 通りが考えられる。ところが条件より点 P は点 A, B とは一致しないので、

$$(p-4, q-3) = (2, -1), (-2, 1)$$

の 2 通りをここから除く必要がある。したがって、整数 p, q の組は

$$8 - 2 = 6 \text{ (通り)}$$

である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

8	9
J	A

〔解説〕

関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{3}} x}{2 \log_2 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}} \cdot \log_2 x + 2 \log_3 9 - \log_3 (16x^4) + \log_3 4^2 \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 \frac{1}{3}} + \frac{\log_2 \frac{1}{2}}{\log_2 \frac{1}{3}} + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{3}}}{2 \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 \sqrt{3}}{\log_2 \frac{1}{3}}} \cdot \log_2 x + 4 - \frac{\log_2 (16x^4)}{\log_2 3} + \frac{\log_2 4^2}{\log_2 3} \\
 &= \frac{(\log_2 x)^2}{(\log_2 3)^2} - \frac{4 \log_2 x}{\log_2 3} + 4
 \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $\log_2 x = X$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 \frac{(\log_2 x)^2}{(\log_2 3)^2} - \frac{4 \log_2 x}{\log_2 3} + 4 &= \frac{X^2}{(\log_2 3)^2} - \frac{4X}{\log_2 3} + 4 \\
 &= \frac{1}{(\log_2 3)^2} (X - 2 \log_2 3)^2
 \end{aligned}$$

となるから、 $X = 2 \log_2 3$ すなわち $x = 3^2 = 9$ のとき、 $f(x)$ は最小値 0 をとる。

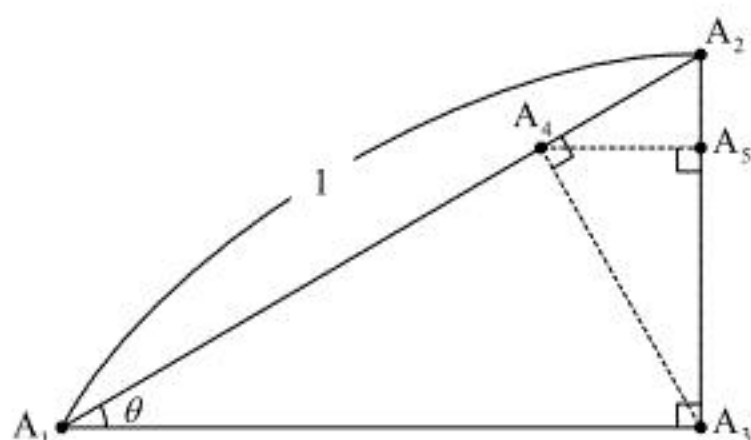
〔V〕

〔解答〕

(1)	10
	I
(2)	11
	I
(3)	12
	F

〔解説〕

(1)



上図より、線分 $A_n A_{n+1}$ の長さを l_n とおくと、

$$l_{n+1} = \begin{cases} l_n \sin \theta & (n \text{ が奇数のとき}) \\ l_n \cos \theta & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ。 $l_1 = 1, l_2 = \sin \theta$ であるから

$$l_n = \begin{cases} \sin^{\frac{n-1}{2}} \theta \cos^{\frac{n-1}{2}} \theta & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \sin^{\frac{n}{2}} \theta \cos^{\frac{n}{2}-1} \theta & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

となる。したがって、線分 $A_8 A_9$ の長さは $l_8 = \sin^4 \theta \cos^3 \theta$ と求まる。

(2)

(1)の議論より、 n が偶数のとき線分 $A_n A_{n+1}$ の長さは $\sin^{\frac{n}{2}} \theta \cos^{\frac{n}{2}-1} \theta$ である。

(3)

n が偶数のとき $\angle A_n A_{n+1} A_{n+2} = \theta$ となるから、三角形 $A_n A_{n+1} A_{n+2}$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot l_n \cdot l_{n+1} \cdot \sin \theta &= \frac{1}{2} \cdot \sin^{\frac{n}{2}} \theta \cos^{\frac{n}{2}-1} \theta \cdot \sin^{\frac{n}{2}} \theta \cos^{\frac{n}{2}} \theta \cdot \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin^{n+1} \theta \cos^{n-1} \theta \end{aligned}$$

である。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

(1)	13		
	D		
(2)	14		
	H		
(3)	15	16	102
	C	G	$\frac{50}{3}$

〔解説〕

(1)

$\overrightarrow{AB} = (2, 2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (4, 0, 3)$ であるから, $\angle BAC = \theta$ とすると,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \\ &= \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

(2)

$0 < \theta < \pi$ より, $\sin \theta > 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって, 三角形 ABC の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

条件より, 直線 AD と平面 α は垂直であるから, $AB \perp AD$ かつ $AC \perp AD$ となる。したがって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2, 2, -1) \cdot (m-1, 5, n+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(m-1) + 10 - (n+2) &= 0 \\ \therefore 2m - n + 6 &= 0 && \cdots \textcircled{1} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} &= 0 \\ \Leftrightarrow (4, 0, 3) \cdot (m-1, 5, n+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(m-1) + 3(n+2) &= 0 \\ \therefore 4m + 3n + 2 &= 0 && \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立ち, ①, ②を連立して解くと,

$$m = -2, n = 2$$

が得られる。以上より, $\overrightarrow{AD} = (-3, 5, 4)$ であるから, 四面体 ABCD の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot (\text{三角形 ABC}) \cdot |\overrightarrow{AD}| &= \frac{1}{3} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 4^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \\ &= \frac{50}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

(1)	17	18		
	G	E		
(2)	19	20	21	
	J	C	G	
(3)	103			
	$\frac{9}{4}$			

〔解説〕

(1)

l の方程式を実数 m, n を用いて、 $y = mx + n$ とおく。いま l は C_1 に接するから、2 次方程式

$$(x-3)^2 + 1 = mx + n \Leftrightarrow x^2 - (6+m)x + 10 - n = 0$$

の判別式を D_1 とおくと

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (6+m)^2 - 4(10-n) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore n = -\frac{1}{4}m^2 - 3m + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また l は C_2 に接するから、2 次方程式

$$x^2 - 2 = mx + n \Leftrightarrow x^2 - mx - 2 - n = 0$$

の判別式を D_2 とおくと

$$\begin{aligned} D_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 + 4(2+n) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore n = -\frac{1}{4}m^2 - 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。よって、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を連立して解くと、

$$m = 1, n = -\frac{9}{4}$$

が得られる。以上より、 l の傾きは 1、 y 切片は $-\frac{9}{4}$ である。

(2)

C_1 と l の接点の x 座標は

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + 1 &= x - \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow x^2 - 7x + \frac{49}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

と求まり、 C_2 と l の接点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &= x - \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

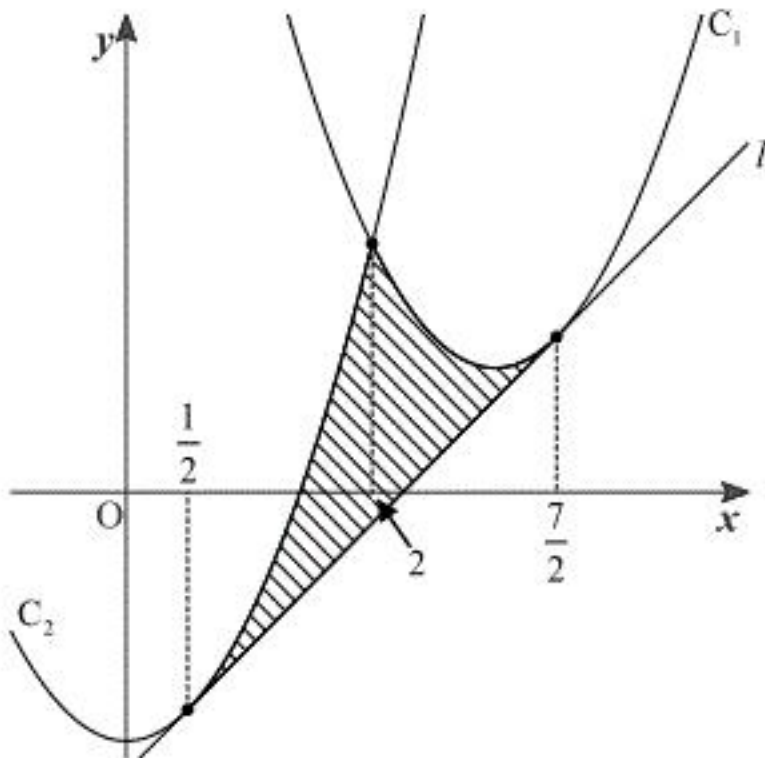
と求まる。また、 C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + 1 &= x^2 - 2 \\ \Leftrightarrow -6x + 12 &= 0 \\ \therefore x &= 2 \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

(2)より、 C_1, C_2, l の位置関係は下図のようになり、求める面積は斜線部分の面積である。



上図より、求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{2}}^2 \left\{ (x^2 - 2) - \left(x - \frac{9}{4} \right) \right\} dx + \int_2^{\frac{7}{2}} \left\{ (x-3)^2 + 1 \right\} - \left(x - \frac{9}{4} \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx + \int_2^{\frac{7}{2}} \left(x - \frac{7}{2} \right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^2 + \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{7}{2} \right)^3 \right]_2^{\frac{7}{2}} \\ &= \frac{9}{8} + \frac{9}{8} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

である。