

【I】

【解答】

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
F	※	E	D	C	P

【解説】

1.

まず、6枚のカードを全て引き切る、すなわちカードを引く回数が6回になる引き方が存在するかを考える。このとき、6回目に青の3を引くとすると、それ以前に赤の3と青か赤の1,2が引かれているから、1,2,3の番号がそろっているため、6回になることはない。ゆえに、カードを引く回数は6回になることはない。最後に引くカードを他のカードにして考えても、同様に6回になることはないから、カードを引く回数が6回になる引き方は存在しない。次に、引く回数が5回になり得るかを考える。このとき、最初の4回で青と赤の1,2を引き、5回目に青の3を引いた場合、カードを引く回数は5回である。よって、カードを引く回数が5回となるような引き方が存在するから、カードを引く回数は最大で5回である。

※(2)については、大学からの発表により解なし。

2.

ある整数が $ab_{(6)}$, $123_{(a)}$ と表されるから、整数 a, b は $4 \leq a \leq 5, 2 \leq b \leq 5$ を満たす。このとき、 $ab_{(6)}$, $123_{(a)}$ をそれぞれ10進数で表すと、

$$\begin{aligned} ab_{(6)} &= 6a + b \\ 123_{(a)} &= a^2 + 2a + 3 \end{aligned}$$

となる。以下、 a の値で場合分けをして考える。

[1] $a=4$ のとき

$$\begin{aligned} ab_{(6)} &= 6a + b \\ &= b + 24 \\ 123_{(a)} &= a^2 + 2a + 3 \\ &= 16 + 8 + 3 \\ &= 27 \end{aligned}$$

より、2つの値が等しいから、 $b=3$ となる。これは、 $2 \leq b \leq 5$ を満たすから、適する。

[2] $a=5$ のとき

$$\begin{aligned} ab_{(6)} &= 6a + b \\ &= b + 30 \\ 123_{(a)} &= a^2 + 2a + 3 \\ &= 25 + 10 + 3 \\ &= 38 \end{aligned}$$

より、2つの値が等しいから、 $b=8$ となる。これは、 $2 \leq b \leq 5$ を満たさず、不適である。以上、[1], [2]より、 $a=4, b=3$ である。

3.

直線 ℓ と曲線 C の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x + c &= x(x^2 - 2) \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x &= c \end{aligned} \quad \cdots \text{①}$$

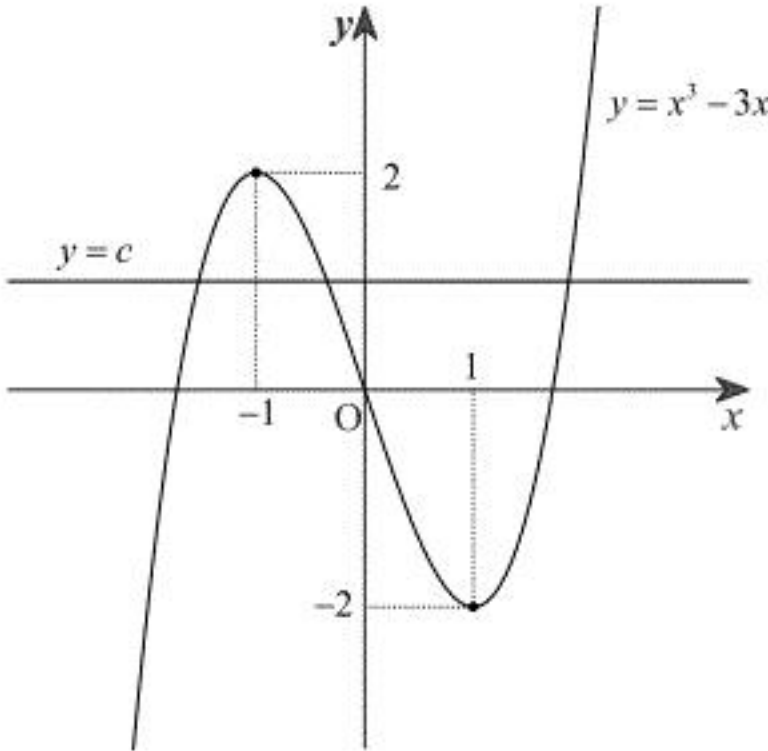
の実数解である。このとき、 $f(x) = x^3 - 3x$ とおくと、方程式の異なる実数解の個数とグラフの共有点の個数が一致するから、 C と ℓ が共有点を2つ持つための条件は、①がちょうど2つの実数解を持つことである。すなわち、求める c の値は、 $y = f(x)$ と $y = c$ が共有点をちょうど2つ持つような c の値である。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

より、増減表は以下の通りである。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

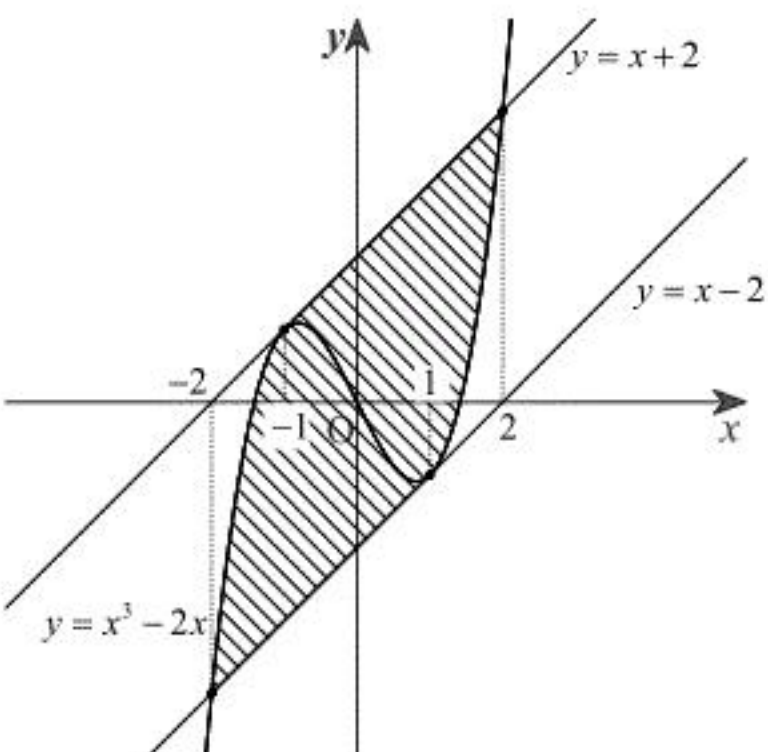
よって、 $y = f(x)$ および $y = c$ のグラフは下図の通りである。



グラフより、 $y = f(x)$ と $y = c$ が共有点をちょうど2つ持つのは、 $c = \pm 2$ のときである。 c は正の数であるから、求める c の値は $c = 2$ となる。次に曲線 C と直線 ℓ, ℓ' の交点の x 座標はそれぞれ、

$$\begin{aligned} x(x^2 - 2) &= x + 2 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 2 \\ x(x^2 - 2) &= x - 2 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) &= 0 \\ \therefore x &= -2, 1 \end{aligned}$$

である。ゆえに、曲線 C と直線 ℓ, ℓ' で囲まれた図形は下図における斜線部である。



上図における斜線部の面積を S とすると、

$$S = \int_{-1}^2 \{(x+2) - (x^3 - 2x)\} dx + \int_{-2}^1 \{(x^3 - 2x) - (x-2)\} dx$$

となる。ここで、第2項の積分について、 $x = -t$ と置換すると、 $dx = -dt$ であり、 x と t の対応関係は以下の通りである。

x	-2	$\rightarrow$	1
t	2	$\rightarrow$	-1

よって、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(x+2) - (x^3 - 2x)\} dx + \int_2^{-1} \{(-t^3 + 2t) - (-t-2)\} (-dt) \\ &= \int_{-1}^2 \{(x+2) - (x^3 - 2x)\} dx + \int_{-1}^2 \{(t+2) - (t^3 - 2t)\} dt \\ &= 2 \int_{-1}^2 \{(x+2) - (x^3 - 2x)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + 4x \right]_{-1}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2} \right) \{ 2^4 - (-1)^4 \} + 3 \{ 2^2 - (-1)^2 \} + 4 \{ 2 - (-1) \} \\ &= -\frac{15}{2} + 9 + 12 \\ &= \frac{27}{2} \\ &= 13.5 \end{aligned}$$

となるから、 $S = 13.5$ である。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
4	4	6	2	2	2	5	3	2
コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
3	3	2	1	2	2	3	3	2

〔解説〕

$$\overrightarrow{PA}=(3-x,1-y),\overrightarrow{PB}=(1-x,3-y)より,$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$$

$$\Leftrightarrow(3-x)(1-x)+(1-y)(3-y)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+3+y^2-4y+3=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=4x+4y-6$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=2\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

となるから、点P(x,y)の軌跡は中心(2,2)、半径 $\sqrt{2}$ の円となる。この円を円Qとする。次にC(p,q)(p,q は実数)とおくと、点Cは円Q上の点であるから、

$$(p-2)^2+(q-2)^2=2\Leftrightarrow p^2+q^2=4p+4q-6\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

を満たす。また、 $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{2}$ であるから、

$$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{CA}|^2=2\left(\because |\overrightarrow{CA}|\geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow (3-p)^2+(1-q)^2=2$$

$$\Leftrightarrow p^2+q^2=6p+2q-8\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}$$

である。よって②-③より

$$0=-2p+2q+2\Leftrightarrow p=q+1$$

であるから、②に代入して、

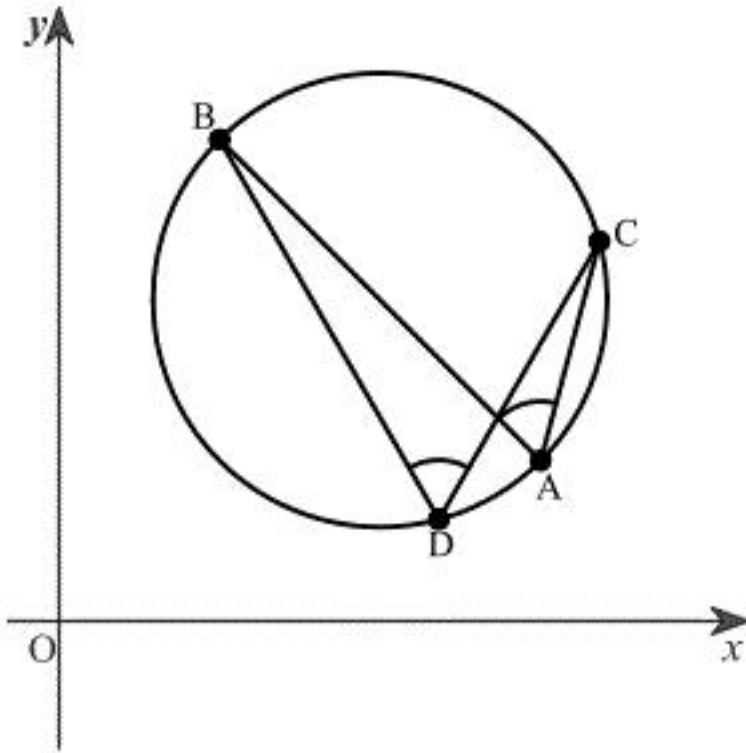
$$(q+1)^2+q^2=4(q+1)+4q-6$$

$$\Leftrightarrow 2q^2-6q+3=0$$

$$\therefore q=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$$

となる。ゆえに、 $(p,q)=\left(\frac{5\pm\sqrt{3}}{2},\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}\right)$ (複号同順)である。ここで、COとABが交わるから、点Cは直線AB上または直線の上側に存在する。直線ABの方程式が $y=-x+4$ であるから、 p,q は $q\geq -p+4$ を満たすことが必要である。

$(p,q)=\left(\frac{5\pm\sqrt{3}}{2},\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}\right)$ (複号同順)のうち、 $q\geq -p+4$ を満たすのは、 $(p,q)=\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2},\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$ であり、確かにCOとABが交わるから、点Cの座標は $C\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2},\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$ となる。さらに点Dについて、DOとABが交わらないことから、下図のようになる。



円周角の定理より $\angle CDB=\angle CAB$ であり、

$$\begin{aligned}BC^2&=\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}-3\right)^2\\&=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)^2\\&=\frac{12+6\sqrt{3}}{4}+\frac{12-6\sqrt{3}}{4}\\&=6\end{aligned}$$

である。ゆえに、余弦定理より、 $\cos\angle CDB$ の値は

$$\begin{aligned}\cos\angle CDB&=\cos\angle CAB\\&=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}\\&=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-6}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\\&=\frac{8+2-6}{8}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。ここで $2|\overrightarrow{DB}|=(1+\sqrt{3})|\overrightarrow{DC}|$ より、 $k(>0)$ を用いて $|\overrightarrow{DB}|=(1+\sqrt{3})k,|\overrightarrow{DC}|=2k$ とおく

と、 $\triangle CDB$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned}BC^2&=DB^2+DC^2-2DB\cdot DC\cos\angle CDB\\\Leftrightarrow 6&=(1+\sqrt{3})^2k^2+4k^2-2\cdot(1+\sqrt{3})k\cdot 2k\cdot\frac{1}{2}\\\Leftrightarrow 6&=(4+2\sqrt{3})k^2+4k^2-2(1+\sqrt{3})k^2\\\Leftrightarrow 6k^2&=6\\\therefore k&=1(\because k>0)\end{aligned}$$

となる。よって、 $|\overrightarrow{DC}|=2$ であり、同様にして $|\overrightarrow{DB}|=1+\sqrt{3}$ が得られる。このとき、

$0<\angle CDB<\pi$ より、

$$\begin{aligned}\sin\angle CDB&=\sqrt{1-\cos^2\angle CDB}\\&=\sqrt{1-\frac{1}{4}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

であるから、 $\triangle CDB$ の面積は

$$\begin{aligned}\triangle CDB&=\frac{1}{2}\cdot DC\cdot DB\cdot\sin\angle CDB\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

である。

【Ⅲ】

1. (1)

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 0$ 、公差 2 の等差数列であるから、

$$a_n = 2(n-1)$$

となる。よって、 $f_n(x)$ は

$$f_1(x) = 2 \cdot 2^2 - 2x^2 = -2(x-2)(x+2)$$

$$f_n(x) = -2\{x-2(n-2)\}(x-2n) \quad (n \geq 2)$$

であるから、 $f_2(x)$ 、 $f_3(x)$ は

$$f_2(x) = -2x(x-4)$$

$$= -2(x-2)^2 + 8$$

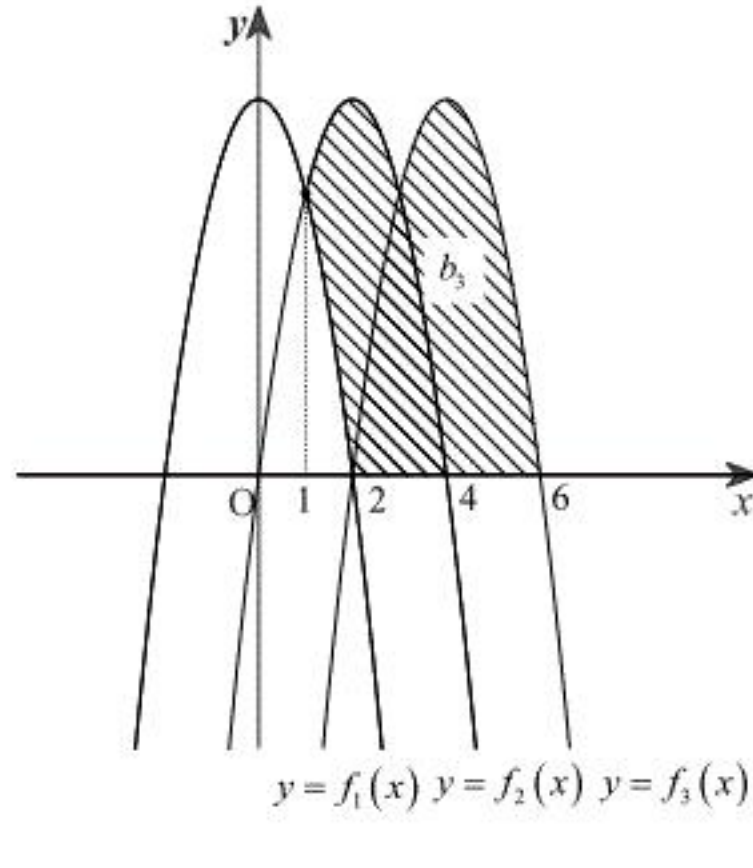
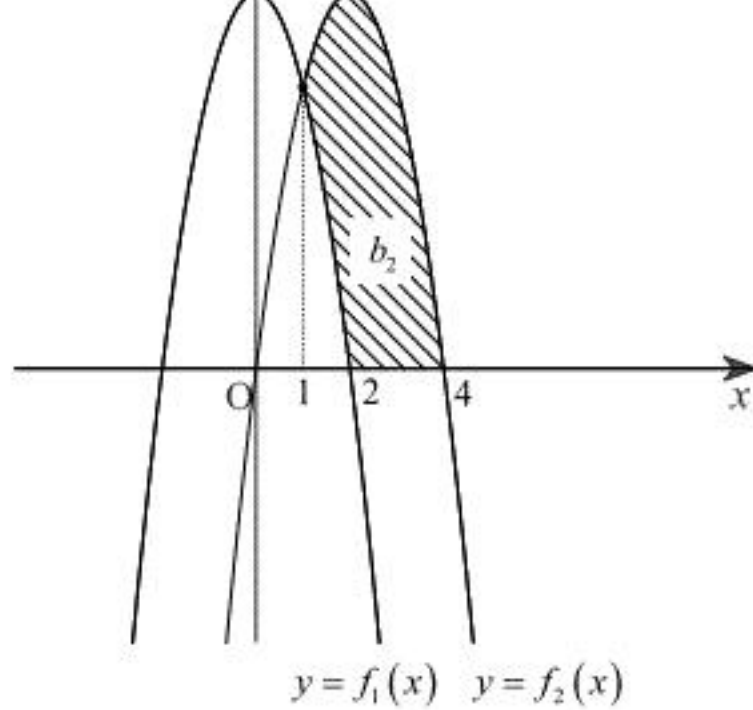
$$f_3(x) = -2(x-2)(x-6)$$

$$= -2(x-4)^2 + 8$$

となる。 b_2 は $x \geq \frac{2}{2} = 1$ 、 $y \geq 0$ の範囲で、 x 軸と関数 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ のグラフで囲まれた図形の

面積、 b_3 は $x \geq \frac{2}{2} = 1$ 、 $y \geq 0$ の範囲で、 x 軸と関数 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 、 $f_3(x)$ のグラフで囲まれた図形

の面積であるから、それぞれ下図における斜線部の面積となる。



(答) 前図

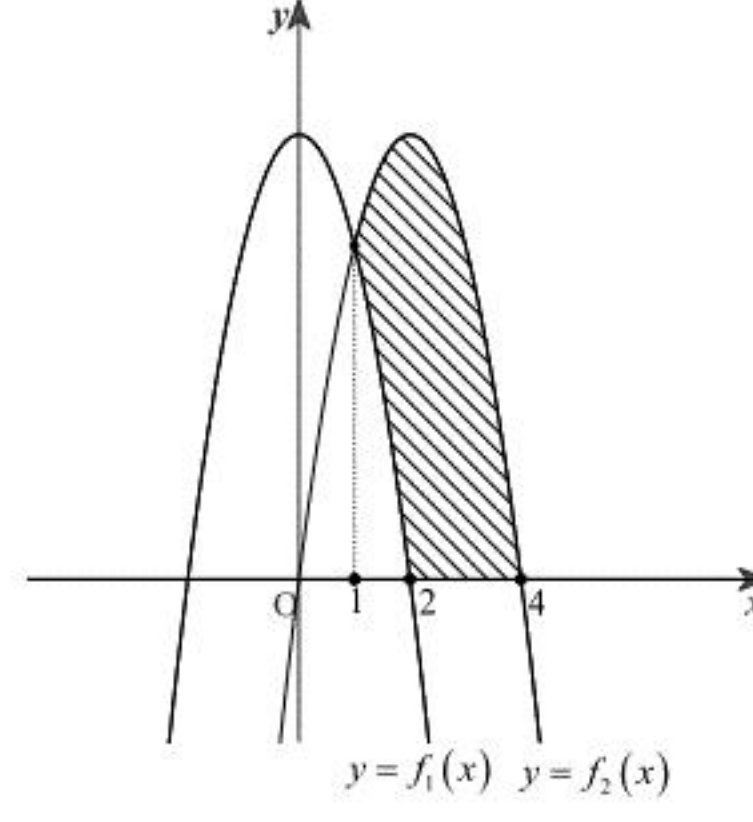
(2)

$n \geq 2$ において、

$$f_{n+1}(x) = -2\{x-2(n+1-2)\}\{x-2(n+1)\}$$

$$= -2\{(x-2)-2(n-2)\}\{(x-2)-2n\}$$

より、 $y = f_{n+1}(x)$ は $y = f_n(x)$ を x 軸方向に 2 だけ平行移動した曲線である。ゆえに、ある図形を平行移動させてもその面積は変化しないから、 b_2 および $b_{n+1} - b_n$ ($n \geq 2$) は、下図における斜線部の面積に一致する。



このとき、斜線部の面積は、

$$\begin{aligned} & \int_1^4 \{-2x(x-4)\} dx - \int_1^2 \{-2(x-2)(x+2)\} dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 \right]_1^4 - \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x \right]_1^2 \\ &= -\frac{2}{3}(4^3 - 1^3) + 4(4^2 - 1^2) + \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) - 8(2 - 1) \\ &= \frac{44}{3} \end{aligned}$$

となるから、 b_2 および $b_{n+1} - b_n$ ($n \geq 2$) の値は $\frac{44}{3}$ である。ゆえに、数列 $\{b_n\}$ の一般項は $n \geq 2$

において

$$b_n = b_2 + (n-2) \cdot \frac{44}{3}$$

$$= \frac{44}{3} + \frac{44}{3}(n-2)$$

$$= \frac{44}{3}(n-1)$$

となる。 $n=1$ のとき、 $b_1 = 0$ となるから、 $n=1$ のときも成立する。ゆえに、 $b_n = \frac{44}{3}(n-1)$ である。

(答) $b_n = \frac{44}{3}(n-1)$

2. (1)

自然数 k に対し、等差数列 $\{a_n(k)\}$ の公差を d_k とする。このとき、数列 $\{a_n(k+1)\}$ の公差 d_{k+1}

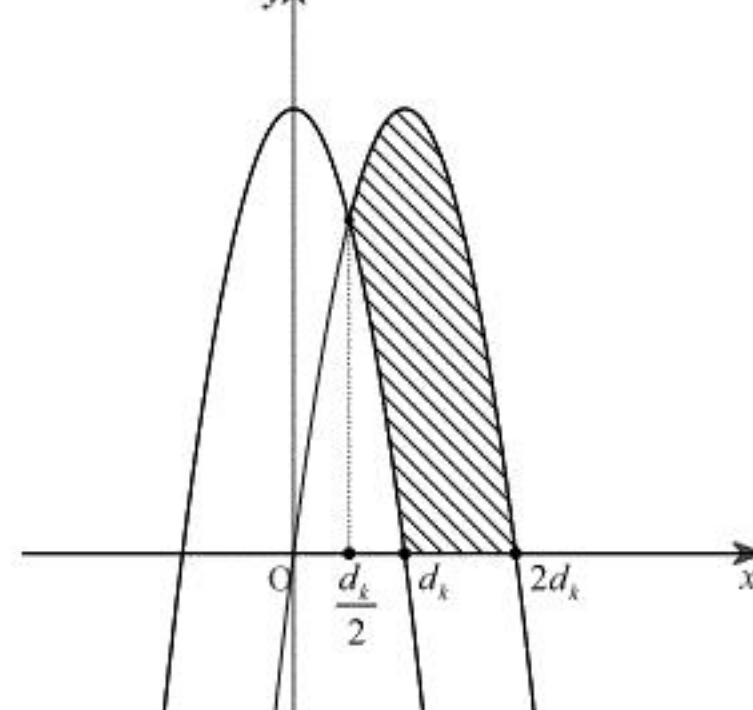
に注目する。任意の自然数 k に対して、 $a_1(k) = 0$ であるから、

$$a_n(k) = d_k(n-1)$$

が成り立つ。このとき、関数 $f_n(x)$ は

$$\begin{cases} f_1(x) = 2d_k^2 - 2x^2 \\ f_n(x) = -2\{x-d_k(n-2)\}(x-d_k n) \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

であるから、1.(2)と同様に考えて、数列 $\{a_n(k+1)\}$ の公差 d_{k+1} は下図における斜線部の面積となる。



したがって、

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= \int_{\frac{d_k}{2}}^{2d_k} \{-2x(x-2d_k)\} dx - \int_{\frac{d_k}{2}}^{d_k} (2d_k^2 - 2x^2) dx \\ &= \int_{\frac{d_k}{2}}^{2d_k} (-2x^2 + 4d_k x) dx - \int_{\frac{d_k}{2}}^{d_k} (2d_k^2 - 2x^2) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2d_k x^2 \right]_{\frac{d_k}{2}}^{2d_k} - \left[2d_k^2 x - \frac{2}{3}x^3 \right]_{\frac{d_k}{2}}^{d_k} \\ &= -\frac{2}{3} \left\{ (2d_k)^3 - \left(\frac{d_k}{2} \right)^3 \right\} + 2d_k \left\{ (2d_k)^2 - \left(\frac{d_k}{2} \right)^2 \right\} \\ &\quad - 2d_k^2 \left(d_k - \frac{d_k}{2} \right) + \frac{2}{3} \left\{ d_k^3 - \left(\frac{d_k}{2} \right)^3 \right\} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{63}{8} d_k^3 + 2d_k \cdot \frac{15}{4} d_k^2 - 2d_k^2 \cdot \frac{d_k}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} d_k^3 \\ &= \frac{11}{6} d_k^3 \end{aligned}$$

となる。 $d_1 = 1$ であるから、 $k=2, 3, 4$ について、数列 $\{a_n(k)\}$ の公差 d_k は

$$k=2 \text{ のとき、 } d_2 = \frac{11}{6} \cdot 1^3 = \frac{11}{6}$$

$$k=3 \text{ のとき、 } d_3 = \frac{11}{6} \cdot \left(\frac{11}{6} \right)^3 = \left(\frac{11}{6} \right)^4$$

$$k=4 \text{ のとき、 } d_4 = \frac{11}{6} \cdot \left\{ \left(\frac{11}{6} \right)^4 \right\}^3 = \left(\frac{11}{6} \right)^{13}$$

となる。

(答) $k=2$ のとき $\frac{11}{6}$ 、 $k=3$ のとき $\left(\frac{11}{6} \right)^4$ 、 $k=4$ のとき $\left(\frac{11}{6} \right)^{13}$

(2)

2. (1)より d_k 、 d_{k+1} は

$$d_{k+1} = \frac{11}{6} d_k^3$$

の関係式を満たす。このとき、 $d_2 = \frac{11}{6}$ は $d_2 > 0$ 、 $d_2 \neq 1$ を満たすから、 d_2 を底とした対数をと

ると、

$$\begin{aligned} \log_{d_2} d_{k+1} &= 3 \log_{d_2} d_k + 1 \\ \Leftrightarrow \log_{d_2} d_{k+1} + \frac{1}{2} &= 3 \left(\log_{d_2} d_k + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって、数列 $\left\{ \log_{d_2} d_k + \frac{1}{2} \right\}$ は初項 $\log_{d_2} d_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 、公比 3 の等比数列であるか

ら、

$$\begin{aligned} \log_{d_2} d_k + \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 3^{k-1} \\ \Leftrightarrow \log_{d_2} d_k &= \frac{3^{k-1} - 1}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\log_{d_2} d_{k+2} = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

である。

(答) $\log_{d_2} d_{k+2} = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$