

〔 I 〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	
	1	6	
(2)	ウ	エ	オ
	5	3	8
(3)	カ	キ	
	9	0	

〔解説〕

(1)

$$\frac{m}{2} + \frac{n}{3} = \frac{3m+2n}{6}$$

である。 m, n は整数であるため、 $3m+2n$ も整数である。また、

$$\begin{aligned}\frac{m}{2} + \frac{n}{3} &> 0 \\ \Leftrightarrow 3m+2n &> 0\end{aligned}$$

であるため、 $3m+2n \geq 1$ である。ここで、 $(m, n) = (1, -1)$ のとき、 $3m+2n = 1$ となるため、

m, n が整数のとき、 $\frac{m}{2} + \frac{n}{3}$ で表される最小の正の数は $\frac{1}{6}$ である。

(2)

$$\begin{aligned}\int_2^7 \frac{x}{x+1} dx &= \int_2^7 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= \left[x - \log(x+1)\right]_2^7 \\ &= (7 - \log 8) - (2 - \log 3) \\ &= 5 + \log \frac{3}{8}\end{aligned}$$

となる。

(3)

ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12} &= \frac{2^{12}}{(\sqrt{2})^{12}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{12}} \\ &= 2^6 \cdot \frac{\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{12}}{\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{12}} \\ &= 64 \cdot \frac{\cos 4\pi + i \sin 4\pi}{\cos 3\pi + i \sin 3\pi} \\ &= -64\end{aligned}$$

となる。よって、複素数の相等より、求める実数は $a = -64, b = 0$ となる。

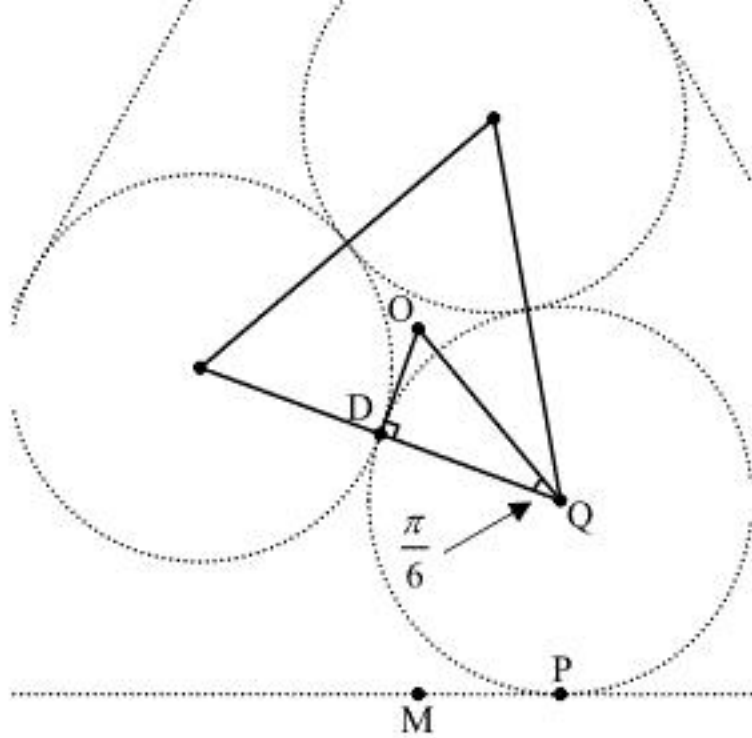
【Ⅱ】

【解答】

あ	$\frac{2}{\sqrt{3}}r\sin\theta$
い	$\frac{r}{\sqrt{3}}(2\cos\theta+\sqrt{3})$
う	$\sqrt{3}$
え	$\frac{1}{2}$
お	$\frac{1}{4}$
か	$1-\frac{1}{2^m}$
き	$1-\frac{2m+3}{3\cdot 2^m}$

【解説】

- (1) 点Qを中心とする半径 r の円と隣の半径 r の円の接点をDとする。半径 r の3つの円の中心を頂点とする三角形は辺の長さが $2r$ の正三角形である。また、この正三角形の重心はOであるため、 $\angle OQD=\frac{\pi}{6}$ である。 $\triangle OQD$ は下図のようになる。

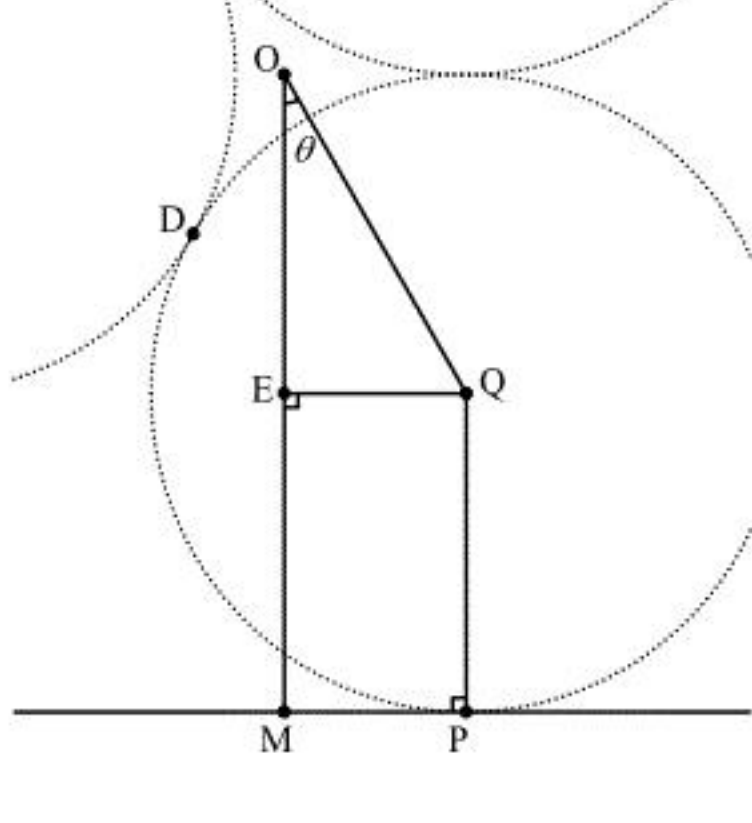


よって、

$$OQ = \frac{QD}{\cos \angle OQD}$$

$$= \frac{r}{\cos \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}r$$
 となる。また、 $\triangle ABC$ は正三角形であるため、 $OM \perp BC$ であり、点Pは点Qを中心とする半径 r の円と辺BCの接点であるため、 $QP \perp BC$ である。よって、 $OM \parallel QP$ となる。ここで、点Qから線分OMに下した垂線の足をEとすると、 $\angle QEM = \angle QPM = \frac{\pi}{2}$ であるため、四角形EQPMは長方形である。長方形EQPMと点Oの位置関係は下図の通りである。



よって、

$$MP = EQ$$

$$= OQ \sin \angle QOE$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}r \sin \theta$$
 となる。さらに、

$$OM = OE + EM$$

$$= OQ \cos \angle QOE + QP$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}r \cos \theta + r$$

$$= \frac{r}{\sqrt{3}}(2\cos\theta + \sqrt{3})$$
 となる。ここで、 $BC=12$ 、 $BP=7$ とする。点Mは辺BCの中点であるため、 $BM=6$ となる。よって、

$$MP = BP - BM$$

$$= 7 - 6$$

$$= 1$$

である。また、 $\triangle ABC$ は正三角形であるため、 $\angle OBM = \frac{\pi}{6}$ となる。よって、

$$OM = BM \tan \angle OBM$$

$$= 6 \tan \frac{\pi}{6}$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 2\sqrt{3}$$
 である。さらに、点Qを中心とする半径 r の円は $\triangle ABC$ の内部にあるため、

$$0 < r \leq OM$$

$$\Leftrightarrow 0 < r \leq 2\sqrt{3}$$
 となる。以上より、

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}r \sin \theta = 1 \\ \frac{r}{\sqrt{3}}(2\cos\theta + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \\ 0 < r \leq 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2r} \\ \cos \theta = \frac{3}{r} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 < r \leq 2\sqrt{3} \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2r}\right)^2 + \left(\frac{3}{r} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4r^2} + \frac{9}{r^2} - \frac{3\sqrt{3}}{r} + \frac{3}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow r^2 + 12\sqrt{3}r - 39 = 0$$

$$\Leftrightarrow (r + 13\sqrt{3})(r - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore r = \sqrt{3} \left(\because 0 < r < 2\sqrt{3} \right)$$
 となる。

- (2) (a) $X_1 + X_2$ が奇数になるのは、 X_1 と X_2 の偶奇が異なるときである。したがって、 $X_1 + X_2$ が奇数になる確率は、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

である。また、 $X_1 X_2$ が奇数になるのは、 X_1 と X_2 が共に奇数になるときである。したがって、 $X_1 X_2$ が奇数になる確率は、

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

である。

- (b) 積 $X_1 X_2 \cdots X_m$ が偶数になる事象の余事象は $X_1 X_2 \cdots X_m$ が奇数になる事象である。 $X_1 X_2 \cdots X_m$ が奇数になるとき、 $X_1, X_2, \dots, X_m$ がすべて奇数であるため、余事象の確率は、

$$\left(\frac{3}{6}\right)^m = \frac{1}{2^m}$$

である。したがって、求める確率は、 $1 - \frac{1}{2^m}$ である。

- (c) 積 $X_1 X_2 \cdots X_m$ が4の倍数になる事象の余事象は、 $X_1 X_2 \cdots X_m$ が奇数になる、もしくは、4で割って2余る事象である。(b)より、 $X_1 X_2 \cdots X_m$ が奇数になる確率は $\frac{1}{2^m}$ である。また、 $X_1 X_2 \cdots X_m$ が4で割って2余るとき、 $X_1, X_2, \dots, X_m$ のうち1個だけ2もしくは6となり、残りの $m-1$ 個はすべて奇数である。よって、 $X_1 X_2 \cdots X_m$ を4で割ったとき2余る確率は、

$$m \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^{m-1} = \frac{m}{3} \cdot \frac{1}{2^{m-1}}$$

である。以上より、余事象の確率は、

$$\frac{1}{2^m} + \frac{m}{3} \cdot \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{2m+3}{3 \cdot 2^m}$$

である。したがって、求める確率は、 $1 - \frac{2m+3}{3 \cdot 2^m}$ である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

さ	$\frac{2a}{1+a^2}$
し	1
す	1
せ	$-\frac{1}{2}s^2$
そ	$-\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(1+a^2)x^2 + ax = 0 \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{2}(1+a^2)x\left(x - \frac{2a}{1+a^2}\right) = 0 \quad (\because 1+a^2 > 0) \\ \therefore & x = 0, \frac{2a}{1+a^2} \end{aligned}$$

となるため、放物線 C_a と x 軸の交点のうち、原点以外の点の x 座標は $x = \frac{2a}{1+a^2}$ である。ま

た、 $a > 0$ より $\frac{1}{a} > 0$ であるため、相加・相乗平均の関係より、

$$\frac{2a}{1+a^2} = \frac{2}{a + \frac{1}{a}} \leq \frac{2}{2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}} = 1$$

が成り立つ。等号成立条件は

$$\begin{cases} a = \frac{1}{a} \\ a > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a = 1$$

である。したがって、 $\frac{2a}{1+a^2}$ が最大になるのは $a = 1$ のときで、そのとき $x = 1$ である。

(2)

放物線 C_a が点 $P(s, t)$ ($s > 0$) を通るとき、

$$t = -\frac{1}{2}(1+a^2)s^2 + as \Leftrightarrow s^2a^2 - 2sa + s^2 + 2t = 0$$

が成り立つ。ここで、 $f(a) = s^2a^2 - 2sa + s^2 + 2t$ とおく。 $s > 0$ であるため、求める条件は a に関する 2 次方程式 $f(a) = 0$ が異なる 2 個の正の実数解をもつことである。ここで、

$$\begin{aligned} f(a) &= s^2a^2 - 2sa + s^2 + 2t \\ &= s^2\left(a - \frac{1}{s}\right)^2 + s^2 + 2t - 1 \end{aligned}$$

であり、 $s > 0$ より $\frac{1}{s} > 0$ 、 $s^2 > 0$ であるため、軸の a 座標 $\frac{1}{s} > 0$ より、求める条件は、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f\left(\frac{1}{s}\right) < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} s^2 + 2t - 1 < 0 \\ s^2 + 2t > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{2}s^2 < t < -\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

[Ⅳ]

(1)

$f(t)=t-\sin t$ とする。このとき、

$$f'(t)=1-\cos t \geq 0$$

となるため、 $f(t)$ は単調増加関数である。また、 $f(0)=0$ であるため、 $t \geq 0$ のとき、

$$f(t) \geq 0 \Leftrightarrow \sin t \leq t$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

数学的帰納法を利用して、すべての自然数 n について、

$$a_n(\theta) = \left(\frac{2}{b}\right)^{n-1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1(\theta) = \sin \theta = \left(\frac{2}{b}\right)^{1-1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{1-1}}\right)$$

となるため、 $a_1(\theta) = \sin \theta$ より $\textcircled{1}$ が成り立つ。

[2] $n=m$ (m は自然数) のとき

$\textcircled{1}$ が成り立つと仮定する。このとき、漸化式より、

$$\begin{aligned} a_{m+1}(\theta) &= \frac{a_m(\theta)}{b \cos\left(\frac{\theta}{2^m}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{b}\right)^{m-1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{m-1}}\right)}{b \cos\left(\frac{\theta}{2^m}\right)} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \left(\frac{2}{b}\right)^m \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2^m}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^m}\right)}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2^m}\right)} \\ &= \left(\frac{2}{b}\right)^m \sin\left(\frac{\theta}{2^m}\right) \end{aligned}$$

となる。よって、 $n=m$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つならば、 $n=m+1$ のときも $\textcircled{1}$ が成り立つ。

以上、[1], [2] より、すべての自然数 n について $\textcircled{1}$ が成り立つ。

(証明終)

(3)

(1) より、すべての自然数 n 、実数 θ ($0 \leq \theta < \pi$) に対し、

$$\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \leq \frac{\theta}{2^{n-1}}$$

が成り立つ。よって、(2) より、すべての自然数 n に対し、

$$\begin{aligned} a_n(\theta) &= \left(\frac{2}{b}\right)^{n-1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \\ &\leq \left(\frac{2}{b}\right)^{n-1} \cdot \frac{\theta}{2^{n-1}} \\ &= \frac{\theta}{b^{n-1}} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、すべての自然数 m について、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m a_n(\theta) &\leq \sum_{n=1}^m \frac{\theta}{b^{n-1}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{b^m}}{1 - \frac{1}{b}} \theta \\ &< \frac{1}{1 - \frac{1}{b}} \theta \quad (\because b > 1, \theta > 0) \\ &= \frac{b}{b-1} \theta \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(4)

(2) より、 $b=1$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n(\theta) &= 2^{n-1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{a_n(\theta)}{2^{n-1}} &= \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。また、(1) より、すべての自然数 n に対し、

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n(\theta)}{2^{n-1}} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) d\theta \\ &= \left[-2^{n-1} \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2^{n-1} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \right\} \\ &= 2^n \sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\ &\leq 2^n \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって、すべての自然数 m に対し、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n(\theta)}{2^{n-1}} d\theta &\leq \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi^2}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi^2}{4} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) \cdot \frac{\pi^2}{4} \\ &< \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

〔V〕

(1)

点 $P(x, y)$ が原点ではないとき、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r > 0, -\pi \leq \theta < \pi$) とすると、 $r > 0$ であり、極座標の定義から $OP = r$ となり

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 9} \\ &= \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 - 6r \cos \theta + 9} \\ &= \sqrt{r^2 - 6r \cos \theta + 9} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} OP + 2AP &= 6 \\ \Leftrightarrow r + 2\sqrt{r^2 - 6r \cos \theta + 9} &= 6 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{r^2 - 6r \cos \theta + 9} &= 6 - r \end{aligned}$$

となる。 $\sqrt{r^2 - 6r \cos \theta + 9} \geq 0$ より $0 < r \leq 6$ である。このとき、

$$\begin{aligned} \left(2\sqrt{r^2 - 6r \cos \theta + 9}\right)^2 &= (6 - r)^2 \\ \Leftrightarrow 4(r^2 - 6r \cos \theta + 9) &= r^2 - 12r + 36 \\ \Leftrightarrow 3r\{r - 4(2 \cos \theta - 1)\} &= 0 \\ \therefore r &= 4(2 \cos \theta - 1) \quad (\because r > 0) \end{aligned}$$

となる。したがって、点 P が原点以外の曲線 C 上を動くとき、 $r = 4(2 \cos \theta - 1)$ となる。

(答) $r = 4(2 \cos \theta - 1)$

(2)

(1)より、点 P が原点以外の曲線 C 上を動くとき、

$$r = 4(2 \cos \theta - 1) \quad (0 < r \leq 6, -\pi \leq \theta < \pi)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} 0 < r &\leq 6 \\ \Leftrightarrow 0 < 4(2 \cos \theta - 1) &\leq 6 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \cos \theta &\leq \frac{5}{4} \\ \therefore -\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3} & \quad (\because -\pi \leq \theta < \pi) \end{aligned}$$

となる。また、このとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \cos \theta &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 < 4(2 \cos \theta - 1) &\leq 4 \\ \therefore 0 < r &\leq 4 \end{aligned}$$

となる。したがって、点 P が原点以外の曲線 C 上を動くとき、 $-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}, 0 < r \leq 4$ である。

(答) $-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}, 0 < r \leq 4$

(3)

$$\begin{cases} x(\theta) = 4(2 \cos \theta - 1) \cos \theta \\ y(\theta) = 4(2 \cos \theta - 1) \sin \theta \end{cases}$$

とおくと、①, (1), (2)より、点 P が原点以外の曲線 C 上を動くとき、

$$x = x(\theta), y = y(\theta) \quad \left(-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}\right)$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} x(-\theta) &= 4\{2 \cos(-\theta) - 1\} \cos(-\theta) \\ &= 4(2 \cos \theta - 1) \cos \theta \\ &= x(\theta) \\ y(-\theta) &= 4\{2 \cos(-\theta) - 1\} \sin(-\theta) \\ &= -4(2 \cos \theta - 1) \sin \theta \\ &= -y(\theta) \end{aligned}$$

となるため、曲線 C は x 軸対称より $0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$ の範囲で考える。 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$ のとき、

$y(\theta) \geq 0$ であり、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} x(\theta) &= 4 \cdot (-2 \sin \theta) \cdot \cos \theta + 4 \cdot (2 \cos \theta - 1) \cdot (-\sin \theta) \\ &= -16 \sin \theta \left(\cos \theta - \frac{1}{4} \right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

となるので、 θ について x は単調減少となる。また、 x と θ の対応は次のようになる。

x	0	$\rightarrow$	4
θ	$\frac{\pi}{3}$	$\rightarrow$	0

したがって、求める面積は、 x 軸対称であることを利用して

$$\begin{aligned} 2 \int_0^4 y dx &= 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 y(\theta) \frac{d}{d\theta} x(\theta) d\theta \\ &= -2 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 4(2 \cos \theta - 1) \sin \theta \cdot 4 \sin \theta (4 \cos \theta - 1) d\theta \\ &= 32 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (8 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 1) \sin^2 \theta d\theta \\ &= 32 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ 8 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 1 \right\} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - 6 \cos \theta \sin^2 \theta \Big\} d\theta \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \{ (4 \cos 2\theta + 5)(1 - \cos 2\theta) - 12 \cos \theta \sin^2 \theta \} d\theta \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-4 \cos^2 2\theta - \cos 2\theta + 5 - 12 \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ -4 \cdot \frac{1 + \cos 4\theta}{2} - \cos 2\theta + 5 - 12 \sin^2 \theta (\sin \theta)' \right\} d\theta \\ &= 16 \left[-\frac{1}{2} \sin 4\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + 3\theta - 4 \sin^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 8(2\pi - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。

(答) $8(2\pi - 3\sqrt{3})$