

2022 年度 明治大学

【全学部統一】

解答時間 60分

配点 100点

る

国語, 数学Ⅲ 問題

はじめに, これを読みなさい。

1. 解答を始めるよう合図があるまで, 問題冊子は開かないこと。
2. この問題冊子には, 「数学Ⅲ」と「国語」の問題がおさめられている。「数学Ⅲ」は表面から 8 ページ, 「国語」は裏面から 21 ページである。必要な科目を選択して解答すること。なお, 表紙の次の白紙 2 ページはメモ用紙として使用してもよい。
3. 解答用紙に印刷されている座席番号が正しいかどうか, 受験票と照合して確認すること。
4. 監督者の指示にしたがい, 解答用紙の氏名欄に氏名を記入すること。
5. 解答用紙の「**解答科目マーク欄**」にマークし, 「**解答科目名記入欄**」に**解答する科目名を記入**すること。マークされていない場合, または複数の科目にマークされている場合は, この時限の科目は採点対象外となる。
6. 解答は, すべて解答用紙の所定欄にマークすること。
7. 1 つの解答欄に 2 つ以上マークしないこと。
8. 解答は, 必ず鉛筆またはシャープペンシル(いずれも HB・黒)で記入のこと。
9. 訂正する場合は, 消しゴムできれいに消し, 消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は, 絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。
11. **解答用紙はすべて回収するので, 持ち帰らず, 必ず提出すること。**
12. 問題冊子は, 必ず持ち帰ること。
13. 試験時間は, 60 分である。
14. (数学Ⅲ) 分数形で解答する場合は, 既約分数で答えること。
15. (数学Ⅲ) 根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えること。
16. マーク記入例

良い例	悪い例
	

数学Ⅲ 問題

〔Ⅰ〕 次の空欄 カ に当てはまるものを指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。それ以外の空欄には、当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

(1) 曲線 $y = 1 + \sin^2 x$ と x 軸, y 軸, および直線 $x = \pi$ で囲まれた図形の面積は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}} \pi$ となる。

(2) $\log$ を自然対数とすると、次の等式が成り立つ。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}+h} \log \left(|\sin t|^{\frac{1}{k}} \right) dt = \frac{1}{\text{ウ}} \log \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$$

(3) k を自然数として、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(1 + 4x^{2k})^{n-1}}$$

とおく。このとき、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{カ}$ となる。

カの解答群

- ⑩ 0 ① 1 ② 2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{1}{4}$ ⑥ 2^k
 ⑦ $\frac{1}{2^k}$ ⑧ 4^k ⑨ $\frac{1}{4^k}$

(このページは計算用紙として使用してよい。)

〔Ⅱ〕 次の空欄 , , , に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。なお、解答群から同じものを2回以上選んでもよい。それ以外の空欄には、当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。以下、 $\log$ は自然対数であり、 e はその底とする。

a は $0 < a < 1$ を満たす定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよう。

$$x^2 = a^{-x}$$

$f(x) = x^2 a^x$ とおけば、 $f(x)$ は $x =$ で極小値 をとり、 $x =$ で極大値 をとる。また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$ であり、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ である。

したがって、求める実数解の個数は、 $0 < a <$ のとき 個、 $a =$ のとき 個、 $< a < 1$ のとき 個となる。

ウ、エの解答群

- | | | | | |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| ④ $\frac{1}{\log a}$ | ① $\frac{2}{\log a}$ | ② $-\frac{1}{\log a}$ | ③ $-\frac{2}{\log a}$ | ④ $\frac{1}{e \log a}$ |
| ⑤ $\frac{2}{e \log a}$ | ⑥ $\frac{1}{e^2 \log a}$ | ⑦ $\frac{4}{e^2 \log a}$ | ⑧ $\frac{1}{(e \log a)^2}$ | ⑨ $\frac{4}{(e \log a)^2}$ |

オ、カの解答群

- | | | | | | | |
|-------------|----------------------|----------------------|------------|------------|-------------|------------|
| ④ a | ① a^2 | ② 0 | ③ ∞ | ④ e^{-1} | ⑤ $2e^{-1}$ | ⑥ e^{-2} |
| ⑦ $2e^{-2}$ | ⑧ $e^{\frac{-1}{e}}$ | ⑨ $e^{\frac{-2}{e}}$ | | | | |

(このページは計算用紙として使用してよい。)

〔Ⅲ〕 次の空欄 ア , イ , ウ , エ , オ , キ , ク , ケ に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。なお、解答群から同じものを2回以上選んでもよい。それ以外の空欄には、当てはまる0から9までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。

a, h を正の実数とする。座標平面において、原点 O からの距離が、直線 $x = h$ からの距離の a 倍であるような点 P の軌跡を考える。点 P の座標を (x, y) とすると、 x, y は次の方程式を満たす。

$$\left(1 - \boxed{\text{ア}}\right)x^2 + 2\boxed{\text{イ}}xy = \boxed{\text{ウ}} \quad \cdots \cdots (1)$$

次に、座標平面の原点 O を極、 x 軸の正の部分を開始線とする極座標を考える。点 P の極座標を (r, θ) とする。 $r \leq h$ を満たすとき、点 P の直交座標 (x, y) を a, h, θ を用いて表すと

$$(x, y) = \left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \cos \theta, \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \sin \theta \right) \quad \cdots \cdots (2)$$

となる。

(1) から、 $a = \boxed{\text{カ}}$ のとき、点 P の軌跡は放物線 $x = \boxed{\text{キ}}y^2 + \boxed{\text{ク}}$ となる。この放物線と y 軸で囲まれた図形の面積 S は、

$$S = 2 \int_0^{\boxed{\text{ケ}}} x dy = 2 \int_0^{\boxed{\text{ケ}}} \left(\boxed{\text{キ}}y^2 + \boxed{\text{ク}} \right) dy = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} h^2$$

である。したがって、(2) を利用すれば、置換積分法により次の等式が成り立つことがわかる。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2} d\theta = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

ア、イ、ウの解答群

- ① a^2 ① h^2 ② a^3 ③ a^2h ④ ah^2 ⑤ h^3 ⑥ a^4
⑦ a^2h^2 ⑧ ah^3 ⑨ h^4

エ、オの解答群

- ① h ① ah ② h^2 ③ ah^2
④ $1 + a \cos \theta$ ⑤ $1 + a \sin \theta$ ⑥ $a \cos \theta - 1$ ⑦ $a \sin \theta - 1$
⑧ $1 - a \cos \theta$ ⑨ $1 - a \sin \theta$

キ、ク、ケの解答群

- ① h ① $2h$ ② $\frac{h}{2}$ ③ $-\frac{h}{2}$ ④ $\frac{1}{h}$
⑤ $-\frac{1}{h}$ ⑥ $\frac{1}{2h}$ ⑦ $-\frac{1}{2h}$ ⑧ h^2 ⑨ $-h^2$

〔Ⅳ〕 次の空欄に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。ただし、空欄

アイ

 ,

ウエ

 ,

オカ

 は 2 桁の数を表し、空欄

キクケ

 ,

コサシ

 ,

スセソ

 は 3 桁の数を表す。

i を虚数単位とし、 $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおく。さいころを 3 回ふり、出た目を順に a, b, c とする。このとき、積 abc が 3 の倍数となる確率は

アイ
ウエ

 である。また、 $z^{abc} = -1$ となる確率は

オカ
キクケ

 であり、 $z^{abc} = 1$ となる確率は

コサシ
スセソ

 である。

(このページは計算用紙として使用してよい。)

