2022年度　明治大学
【総合数理学部】
解答時間　120分
配点　200点

み

数　学　問　題

注意事項

1. この問題冊子は16ページあります。解答用紙には，「数学①」と「数学②」の２枚あり，「数学②」には表と裏があります。
2. あなたの座席番号は，２枚の解答用紙に印刷されています。印刷されている座席番号と，受験票の番号が一致していることを確認しなさい。
3. 監督者の指示にしたがい，２枚の解答用紙の所定の欄に氏名を記入しなさい。
4. 問題〔Ⅰ〕の解答は，解答用紙「数学①」の所定の欄にマークしなさい。
5. 問題〔Ⅱ〕，〔Ⅲ〕の解答は，解答用紙「数学①」の所定の欄に記入しなさい。
6. 問題〔Ⅳ〕，〔Ⅴ〕は，解答用紙「数学②」の所定の欄に解答しなさい。
7. １問につき２つ以上マークしないこと。２つ以上マークした場合には，その解答は無効になります。
8. 解答は，必ず鉛筆又はシャープペンシル(いずれもHB・黒)で記入しなさい。
9. 訂正する場合は，消しゴムできれいに消し，消しくずを残さないこと。
10. 解答用紙は，絶対に汚したり折り曲げたりしないこと。また，所定の欄以外には絶対に記入しないこと。
11. 解答用紙は持ち帰らず，必ず提出しなさい。
12. この問題冊子は必ず持ち帰りなさい。
13. 試験時間は120分です。
14. マークシート記入例

良い例	悪　い　例
●	◉　⊗　◍

〔Ⅰ〕 次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる 0 から 9 までの数字を解答用紙の所定の欄にマークせよ。また，空欄 $\boxed{\text{カ}}$ と $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを指定された解答群の中から選び，解答用紙の所定の欄にマークせよ。

(1) m と n が整数のとき，

$$\frac{m}{2}+\frac{n}{3}$$

で表される最小の正の数は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

(2) $\displaystyle\int_2^7 \frac{x}{x+1}\,dx = \boxed{\text{ウ}} + \log\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

(3) i を虚数単位とする。$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^{12} = a + bi$ を満たす実数 a, b は

$a =$ $\boxed{\text{カ}}$, $b =$ $\boxed{\text{キ}}$ である。

カ，キ の解答群

⓪ 0　① 1　② -1　③ 4　④ -4

⑤ 12　⑥ 16　⑦ -16　⑧ 64　⑨ -64

（このページは計算用紙として使用してよい）

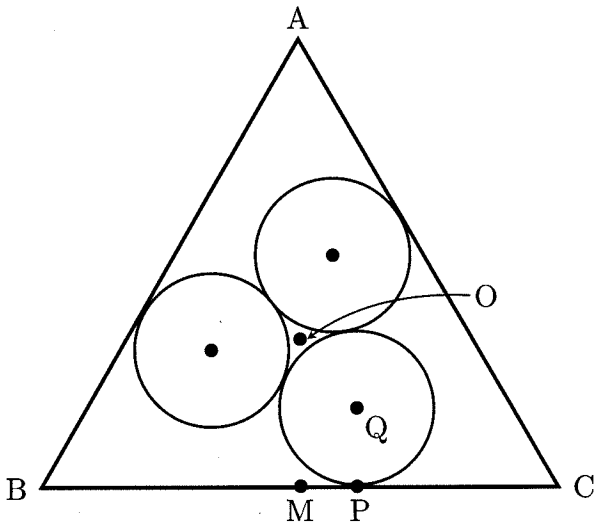
〔Ⅱ〕 次の空欄 $\boxed{\text{あ}}$ から $\boxed{\text{き}}$ に当てはまるもの（数・式など）を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) r は正の定数とする。半径 r の 3 つの円がそれぞれ他の 2 つの円と接している。またこれらの 3 つの円は図のように，正三角形 ABC の異なる 1 辺とそれぞれ接している。辺 BC と接する円の中心を Q とし，接点を P とする。

正三角形 ABC の重心を O，辺 BC の中点を M とする。∠QOM を θ とする。

このとき MP を r と θ で表すと MP= $\boxed{\text{あ}}$ である。また OM を r と θ で表すと OM= $\boxed{\text{い}}$ である。

したがって，BC= 12, BP= 7 であるとき，$r=$ $\boxed{\text{う}}$ となる。



（このページは計算用紙として使用してよい）

(2)　1つのサイコロをくり返し投げて，n 回目に出た目を X_n とおく $(n = 1, 2, 3, \cdots)$。このサイコロの目はどれも $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るものとする。

(a)　サイコロを 2 回投げたとき，$X_1 + X_2$ が奇数になる確率は $\boxed{\text{え}}$，また X_1X_2 が奇数になる確率は $\boxed{\text{お}}$ である。

(b)　サイコロを m 回投げたとき，$X_1, X_2, \cdots, X_m$ の積 $X_1X_2\cdots X_m$ が偶数になる確率を m で表すと $\boxed{\text{か}}$ である。

(c)　サイコロを m 回投げたとき，$X_1, X_2, \cdots, X_m$ の積 $X_1X_2\cdots X_m$ が 4 の倍数になる確率を m で表すと $\boxed{\text{き}}$ である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅲ〕 次の空欄 $\boxed{\text{さ}}$ から $\boxed{\text{そ}}$ に当てはまるもの（数・式など）を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

a は正の定数とする。放物線

$$y = -\frac{1}{2}(1+a^2)x^2 + ax$$

を C_a とおく。

(1) 放物線 C_a と x 軸の交点のうち，原点以外の点の x 座標を a を用いて表すと $x = \boxed{\text{さ}}$ となる。

$\boxed{\text{さ}}$ が最大になるのは $a = \boxed{\text{し}}$ のときで，そのとき $x = \boxed{\text{す}}$ である。

(2) 座標平面上の点を $\mathrm{P}(s,t)$ $(s>0)$ とする。放物線 C_a と $C_{a'}$ が点 P を通るような，相異なる 2 つの正の実数 a, a' が存在するための s, t の条件を不等式で表すと

$$\boxed{\text{せ}} < t < \boxed{\text{そ}}$$

である。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔Ⅳ〕 θ は $0 \leqq \theta < \pi$ を満たす定数，b は正の定数とする。

数列 $\{a_n(\theta)\}$ を，

$$a_1(\theta) = \sin\theta, \quad a_{n+1}(\theta) = \frac{a_n(\theta)}{b\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ のとき $\sin t \leqq t$ が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数 n について

$$a_n(\theta) = \left(\frac{2}{b}\right)^{n-1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$$

が成り立つことを示せ。

(3) $b > 1$ のとき，すべての自然数 m について

$$\sum_{n=1}^{m} a_n(\theta) \leqq \frac{b}{b-1}\theta$$

が成り立つことを示せ。

(4) $b = 1$ のとき，すべての自然数 m について

$$\sum_{n=1}^{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n(\theta)}{2^{n-1}}\, d\theta \leqq \frac{\pi^2}{4}$$

が成り立つことを示せ。

（このページは計算用紙として使用してよい）

〔V〕 座標平面上に，原点 O(0,0) と点 A(3,0) をとる。

動点 P は条件 $\mathrm{OP}+2\mathrm{AP}=6$ を満たしながら動くとする。点 P の描く曲線を C とする。以下の問いに答えよ。(答えだけでなく途中経過も記述すること。)

(1) 点 P は原点ではないとする。点 P の座標 (x,y) を，極座標 (r,θ) を用いて

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \quad (r>0,\ -\pi \leqq \theta < \pi) \qquad \cdots\cdots ①$$

と表す。点 P が曲線 C 上を動くとき，r を θ で表せ。

(2) 点 P は原点ではないとする。点 P が曲線 C 上を動くとき，①で定まる θ と r のとり得る値の範囲をそれぞれ求めよ。

(3) 曲線 C が囲む図形の面積を求めよ。

（このページは計算用紙として使用してよい）