

【Ⅰ】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ						
	1	1	2	3	4						
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス			
	2	2	7	2	1	4	1	8			
(3)	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
	2	1	5	1	1	4	2	7	2	1	5
(4)	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ
	5	1	2	1	3	1	4	1	3	3	4
	ヤ	ユ	ヨ	ラ							
	9	4	3	4							

【解説】

(1)

$f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとき、 $f(x)$ は $x=0$ で連続であるため

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0) \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。このとき、 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ が存在するため、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} (1+3x-a\cos 2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1-a &= 0 \\ \therefore a &= 1 \end{aligned}$$

が必要である。 $a=1$ とすると、 $x>0$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+3x-\cos 2x}{4x} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \end{aligned}$$

より、

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1^2 = \frac{3}{4}$$

となるため、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{3}{4} \\ \therefore c &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

であればよい。さらに、 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとき、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +0} \frac{bx + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 - \frac{3}{4}}{x} \\ \Leftrightarrow b &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \\ \therefore b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)(a)

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= t \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - tx + 1 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ \therefore x^2 - tx + 1 &= 0 \end{aligned}$$

である。ここで、 $x^2 - tx + 1 = 0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= (-t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= t^2 - 4 \\ &= (t-2)(t+2) \end{aligned}$$

であり、 x についての方程式 $x + \frac{1}{x} = t$ が実数解をもつための必要十分条件は、 x についての

方程式 $x^2 - tx + 1 = 0$ が実数解をもつことである。よって、

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \therefore t &\leq -2, 2 \leq t \end{aligned}$$

である。

(b)

$x=0$ は $f(x)=0$ の解ではないため、 $a \neq 0$ である。したがって、

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow 7a^4 + 2a^3 + ka^2 + 2a + 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow 7a^2 + 2a + k + \frac{2}{a} + \frac{7}{a^2} &= 0 \quad (\because a \neq 0) \\ \Leftrightarrow 7 \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) + 2 \left(a + \frac{1}{a} \right) + k &= 0 \\ \Leftrightarrow 7 \left\{ \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 - 2 \right\} + 2 \left(a + \frac{1}{a} \right) + k &= 0 \\ \therefore 7t^2 + 2t + (k-14) &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $g(t) = 7t^2 + 2t + (k-14)$ とおく。(a)より、実数 t に対し、 $x + \frac{1}{x} = t$ を満

たす実数 x の個数は $-2 < t < 2$ のとき0個、 $t = \pm 2$ のとき1個、 $t < -2$ または $2 < t$ のとき2個

となる。よって、方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数が3個となるとき、 t の2次方程式

$g(t) = 0$ は $t = 2$ または $t = -2$ のいずれかを解にもち、さらに $t < -2$ または $t > 2$ の範囲に解を

1つもつ。ここで、 $y = g(t)$ のグラフは下に凸で、軸が $t = -\frac{1}{7}$ の放物線であるため、条件を満

たすためには t の2次方程式 $g(t) = 0$ が $t = 2$ を解にもてばよい。したがって、

$$\begin{aligned} g(2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 28 + 4 + k - 14 &= 0 \\ \therefore k &= -18 \end{aligned}$$

となる。

(3)(a)

Aが引いたくじが2本とも当たりであるのは、当たりくじ4本から2本を引く場合である。

よって、求める確率は

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1}}{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1}} = \frac{2}{15}$$

である。

(b)

AとBが引いたくじの中に1本も当たらないのは、Aがはずれくじ6本から2本を引く、

Bがはずれくじ4本から2本を引く場合である。よって、求める確率は

$$\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} \cdot \frac{{}_4C_2}{{}_8C_2} = \frac{\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}}{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1}} = \frac{1}{14}$$

である。

(c)

Aが引いたくじのうち1本だけが当たりで、かつBが引いたくじの1本だけが当たりである

のは、Aは当たりくじ4本とはずれくじ6本から1本ずつ引き、かつBは当たりくじ3本と

はずれくじ5本から1本ずつ引く場合である。よって、求める確率は

$$\frac{{}_4C_1 \cdot {}_6C_1}{{}_{10}C_2} \cdot \frac{{}_3C_1 \cdot {}_5C_1}{{}_8C_2} = \frac{4 \cdot 6}{10 \cdot 9} \cdot \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \frac{2}{7}$$

である。

(d)

Aの引いたくじの結果は、Aが引いたくじが2本とも当たりである場合、Aが引いたくじの

うち1本だけが当たりである場合、Aが引いたくじの中に1本も当たらない場合に分けら

れる。これらは排反であるため、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_4C_2 \cdot {}_2C_2 + ({}_4C_1 \cdot {}_6C_1) \cdot {}_3C_2 + {}_6C_2 \cdot {}_4C_2}{{}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2} &= \frac{\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 1 + (4 \cdot 6) \cdot 3 + \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}}{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1}} \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

である。

(4)

条件より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \frac{1}{4} \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OE} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OF} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} \\ &= \frac{5}{12} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} \\ &= -\frac{1}{4} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

である。さらに、4点D, E, F, Gは同一平面上にあるため、実数 a, b を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DG} &= a \overrightarrow{DE} + b \overrightarrow{DF} \\ &= \left(\frac{5}{12}a - \frac{b}{4} \right) \overrightarrow{OA} + \frac{a}{3} \overrightarrow{OB} + \frac{b}{3} \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

と表せる。また、点Gは直線BC上の点であるため、実数 p を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DG} &= \overrightarrow{DO} + p \overrightarrow{OB} + (1-p) \overrightarrow{OC} \\ &= -\frac{1}{4} \overrightarrow{OA} + p \overrightarrow{OB} + (1-p) \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

と表せる。ベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は一次独立であるため、係数比較により、

$$\begin{cases} \frac{5}{12}a - \frac{b}{4} = -\frac{1}{4} \\ \frac{a}{3} = p \\ \frac{b}{3} = 1-p \end{cases}$$

$$\therefore (a, b, p) = \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

となる。よって、 $a = \frac{3}{4}, b = \frac{9}{4}$ より、

$$\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{DE} + \frac{9}{4} \overrightarrow{DF}$$

である。また、 $p = \frac{1}{4}$ より点Gは線分BCを3:1に内分する点であるため、

$$\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BC}$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

あ	2
い	$-\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}$
う	$\frac{37}{24}-2\log 2$
え	$\frac{3}{8}+\log 2$
お	$\frac{5}{4}$

〔解説〕

$f(x)=\frac{1}{8}x^2-\log x$ を x で微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x^2-4}{4x} \\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{4x} \end{aligned}$$

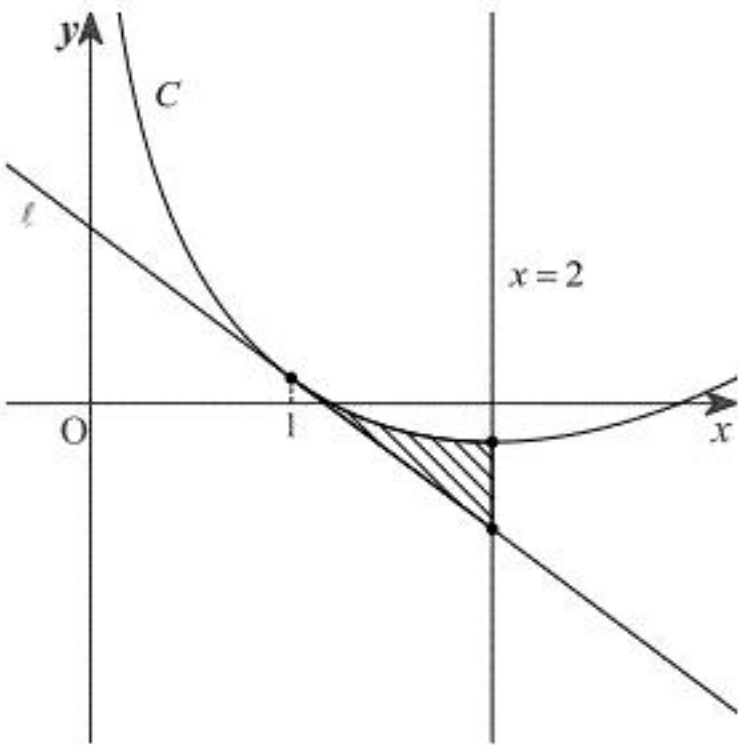
となる。よって、 $f(x)$ の増減は下表のようになる。

x	(0)	...	2	...
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$\frac{1}{2}-\log 2$	↗

上表より、関数 $f(x)$ は $x=2$ で最小値 $\frac{1}{2}-\log 2$ をとる。曲線 C 上の点 $A(1, f(1))$ における曲線 C の接線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y-f(1) &= f'(1)(x-1) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3}{4}x + \frac{7}{8} \end{aligned}$$

となる。ここで、曲線 C と接線 ℓ および直線 $x=2$ で囲まれた部分は下図の斜線部である。



上図より、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left\{ \left(\frac{1}{8}x^2 - \log x \right) - \left(-\frac{3}{4}x + \frac{7}{8} \right) \right\} dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{8} \right) dx - \int_1^2 \log x dx \\ &= \left[\frac{1}{24}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{8}x \right]_1^2 - [x \log x]_1^2 + \int_1^2 dx \\ &= \frac{37}{24} - 2\log 2 \end{aligned}$$

である。また、点 A から点 P までの曲線 C の長さ $L(t)$ は

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_1^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\ &= \int_1^t \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x} \right)^2} dx \\ &= \int_1^t \sqrt{\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int_1^t \sqrt{\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x} \right)^2} dx \\ &= \int_1^t \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x} \right) dx \quad \left(\because \frac{1}{4}x + \frac{1}{x} > 0 \right) \\ &= \left[\frac{1}{8}x^2 + \log x \right]_1^t \\ &= \frac{1}{8}(t^2 - 1) + \log t \end{aligned}$$

となるため、

$$L(2) = \frac{3}{8} + \log 2$$

である。また、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{L(t)}{t-1} &= \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{\frac{1}{8}(t^2 - 1) + \log t}{t-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1+0} \left\{ \frac{1}{8}(t+1) + \frac{\log t}{t-1} \right\} \\ &= \frac{1}{4} + \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{1}{t-1} \log \{1 + (t-1)\} \\ &= \frac{1}{4} + \lim_{t \rightarrow 1+0} \log \{1 + (t-1)\}^{\frac{1}{t-1}} \\ &= \frac{1}{4} + 1 \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

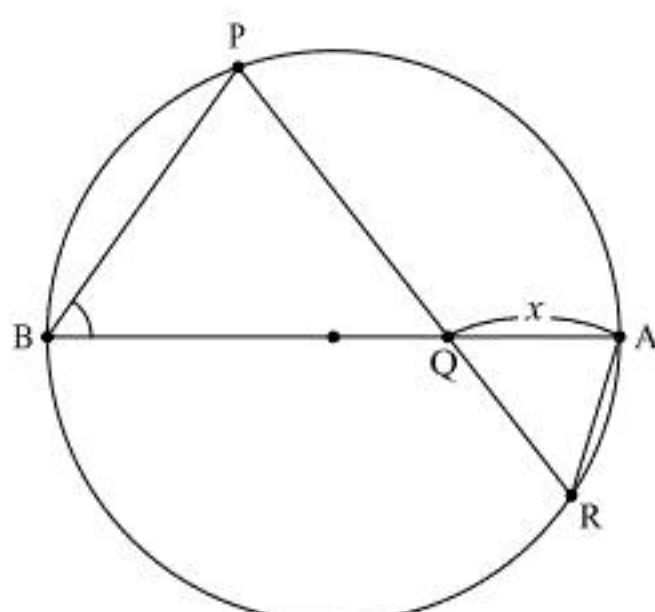
である。

〔Ⅲ〕

〔解答〕

か	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
き	$\sqrt{x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}}$
く	$\frac{\sqrt{2}(2-x)}{3}$
け	$\frac{\sqrt{2}x^2(2-x)}{3x^2 - 8x + 8}$
こ	$\frac{4}{3}$

〔解説〕



3点 A, B, Pは円 O 上の点であり、線分 AB は円 O の直径であるため、 $\angle APB = 90^\circ$ となる。
よって、

$$\begin{aligned} BP &= AB \cos \angle PBA \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

である。 $x = AQ$ とするとき、 $BQ = 2 - x$ となる。三角形 BPQ について、余弦定理より、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= BP^2 + BQ^2 - 2BP \cdot BQ \cos \angle PBA \\ &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 + (2-x)^2 - 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (2-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} = \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 + \frac{8}{9} > 0$ であるため、

$$PQ = \sqrt{x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \sin \angle PBA &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle PBA} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

となるため、三角形 BPQ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} BP \cdot BQ \sin \angle PBA \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (2-x) \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}(2-x)}{3} \end{aligned}$$

である。三角形 AQR と三角形 PQB について、円周角の定理より、 $\angle QAR = \angle QPB$ 、 $\angle QRA = \angle QBP$ が成り立つため、

$$\triangle AQR \sim \triangle PQB$$

となる。三角形 AQR と三角形 PQB の相似比は、

$$AQ : PQ = x : \sqrt{x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}}$$

より、面積比は $x^2 : x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}$ となるため、三角形 AQR の面積 T は

$$\begin{aligned} T &= S \cdot \frac{x^2}{x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2}x^2(2-x)}{3x^2 - 8x + 8} \end{aligned}$$

である。また、両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= \sqrt{2} \cdot \frac{(2x^2 - x^3)' \cdot (3x^2 - 8x + 8) - (2x^2 - x^3) \cdot (3x^2 - 8x + 8)'}{(3x^2 - 8x + 8)^2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{-3x^4 + 16x^3 - 40x^2 + 32x}{(3x^2 - 8x + 8)^2} \\ &= -\sqrt{2} \cdot \frac{x(x^2 - 4x + 8)(3x - 4)}{(3x^2 - 8x + 8)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4 > 0$ であるため、 T の増減は下表のようになる。

x	(0)	...	$\frac{4}{3}$	...	(2)
$\frac{dT}{dx}$		+		-	
T		↗	極大	↘	

したがって、 T が最大となるのは $x = \frac{4}{3}$ のときである。